|  |  |
| --- | --- |
| **UBND TỈNH BẮC NINH** **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** **ĐỀ CHÍNH THỨC**  | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH****NĂM HỌC 2021-2022****Môn :TOÁN – Lớp 9***Thời gian làm bài : 150 phút*  |

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức với 
2. Cho đường thẳng . Tìm biết đi qua và cắt các trục lần lượt tại và B sao cho tam giác cân, O là gốc tọa độ

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình 
2. Giải hệ phương trình 

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình 
2. Cho là các số nguyên dương thỏa mãn là số nguyên tố và chia hết cho 8. Giả sử là các số nguyên thỏa mãn chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số chia hết cho p

**Câu 4. (6,0 điểm)** Cho hình vuông nội tiếp đường tròn . Điểm M thuộc cung nhỏ của (O), M khác C và D. Đường thẳng cắt theo thứ tự tại và K, đường thẳng cắt  và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng cắt nhau tại N

1. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp và là phân giác của 
2. Gọi G là giao điểm của và Chứng minh rằng tứ giác là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp 
3. Chứng minh rằng 

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn. Khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau,tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu ?
2. Cho ba số không âm thỏa mãn Chứng minh bất đẳng thức



**ĐÁP ÁN**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. **Rút gọn biểu thức với **



1. **Cho đường thẳng . Tìm biết đi qua và cắt các trục lần lượt tại và B sao cho tam giác cân, O là gốc tọa độ**

Vì đường thẳng đi qua nên Đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại và 

cân khi 

Từ đó ta tìm được 

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. **Giải phương trình **

Phương trình tương đương :



Đặt được phương trình 

Ta có 

Với 

Với 

Vậy phương trình có tập nghiệm 

1. **Giải hệ phương trình **

ĐKXĐ: . Từ phương trình 



Nếu 

Nếu 

Nếu 

Do đó từ (1) ta có 

Thay vào phương trình được :



Đối chiếu ĐKXĐ thì hệ phương trình có nghiệm 

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. **Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình **

Ta có : ****



Vì nguyên dương nên phải là số chính phương.

Lập luận tương tự ta cũng có là số chính phương. Đặt với 

Ta có 



1. **Cho là các số nguyên dương thỏa mãn là số nguyên tố và chia hết cho 8. Giả sử là các số nguyên thỏa mãn chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số chia hết cho p**

Vì . Ta có :

. Nhận thấy



Do và nên 

Nếu trong hai số có một số chia hết cho thì từ suy ra số thứ hai cũng chia hết cho Nếu cả hai số đều không chia hết cho thì theo định lý Fermat ta có 

(mâu thuẫn với (\*))

Vậy cả hai số đều chia hết cho p

**Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông nội tiếp đường tròn . Điểm M thuộc cung nhỏ của (O), M khác C và D. Đường thẳng cắt theo thứ tự tại và K, đường thẳng cắt  và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng cắt nhau tại N**

****

1. **Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp và là phân giác của **

Vì hình vuông nội tiếp đường tròn nên là giao điểm của hai đường chéo hình vuông Ta có nên tứ giác nội tiếp

Suy ra 

Lại có là trung trực của mà H thuộc nên cân tại H

Suy ra là tia phân giác của 

Ta có , mà

, do đó là tia phân giác của 

1. **Gọi G là giao điểm của và Chứng minh rằng tứ giác là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp **

Tam giác có 

Ta có mà 

Suy ra tứ giác nội tiếp. Lại có hay 

Vì nên là hình chữ nhật

Ta có : và suy ra vuông cân tại nên 

Vì nên là phân giác của Tam giác có là phân giác của và là phân giác của nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác Do đó là phân giác của suy ra . Tương tự ta cũng có lầ phân giác của 

Ta cũng có là phân giác của Do đó dẫn đến là tâm đường tròn nội tiếp tam giác suy ra là phân giác của 

Từ đó suy ra Hai tam giác và có :

và DC chung nên 

Hai tam giác và có chung nên 

Suy ra mà nên là tứ giác nội tiếp

Lại có 

Từ (1) và (2) suy ra hay G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

1. **Chứng minh rằng **

Vì nên tứ giác nội tiếp, suy ra 

Hai tam giác và có chung và 



Vì HE là phân giác của nên 

Vì là phân giác của nên 

Lại có 

Vì là phân giác của nên 

Do nên 

Từ 

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1. **Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn. Khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau,tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu ?**

Gọi là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau bước, 

Sau bước 1, trên đường tròn có số là 1;1 nên

Sau bước 2, trên đường tròn có số là 1,2,1,2 nên 

Sau bước 3, trên đường tròn có số là nên 

Dự đoán sau bước tổng là . Ta sẽ chứng minh 

Thật vậy, với thì (\*) đúng

Giả sử đúng với , nghĩa là sau k bước trên đường tròn đã cho có các số với tổng là 

Sang bước thứ ta xem điểm đã ghi số là điểm chia, nên đường tròn được chia thành cung bằng nhau

Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tương ứng. Do đó 

Vậy với mọi do đó 

1. **Cho ba số không âm thỏa mãn Chứng minh bất đẳng thức**

****

Ta có 

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có :



Do đó . Suy ra



Ta có: 

Áp dụng bất đẳng thức Cosi – Schwwarz ta có



Tương tự:



Từ (1), (2), (3) ta có :





Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 