**ĐS7. CHUYÊN ĐỀ 7 – ĐỒNG DƯ THỨC VÀ BÀI TOÁN CHIA HẾT**

**PHẦN I.TÓM TẮT LÍ THUYẾT.**

**I.Định nghĩa.**

Nếu  thì 

Nếu hai số nguyên  và  có cùng số dư trong phép chia cho một số tự nhiên  thì ta nóiđồng dư với  theo môđun , và có đồng dư thức: 

Ví dụ:

+ Chú ý: 

**II.Một số tính chất.**

1. **Tính chất về đồng dư**

1. Tính chất phản xạ: 

2. Tính chất đối xứng: 

3. Tính chất bắc cầu:  thì 4. Cộng , trừ từng vế: 

Hệ quả:

a) 

b) 

c) 

5. Nhân từng vế : 

Hệ quả:

a

b) 

6. Có thể nhân (chia) hai vế và môđun của một đồng dư thức với một số nguyên dương



Chẳng hạn: 

7. 

Chẳng hạn : 

8. Định lí Fermat:Cho p là số nguyên tố  khi đó 

1. **Tính chất về chia hết**

1. Nếu  chia hết cho cả  và , trong đó  là hai số nguyên tố cùng nhau thì  chia hết cho 

2. Nếu tích  chia hết cho trong đó  thì  chia hết cho

3. Với  là số nguyên tố. Nếu  chia hết cho  thì hoặc  chia hết cho  hoặcchia hết cho

4. Khi chia số nguyên dương liên tiếp cho  luôn nhận được hai số dư bằng nhau.

5. Trong *n* số nguyên liên tiếp, luôn có duy nhất  số chia hết cho 

6. Nếu  thì tồn tại hai số nguyên  sao cho: 

7. Với mọi  và  là số tự nhiên: 

8. Trong  số nguyên liên tiếp () có một và chỉ một số chia hết cho 

9. Lấy  số nguyên bất kì () đem chia cho  thì phải cóhai số khi chia cho  có cùng số dư; (Theo nguyên lí Đirichlet).

10. Tìm  chữ số tận cùng của số  là tìm số dư khi chia  cho .

**PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI.**

**Dạng 1: Dùng đồng dư chứng minh các bài toán chia hết**

1. **Phương pháp giải.**

Khi số dư trong phép chia cho là  thì . Để chứng minh thì  (mod *m*)

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Chứng minh: 

**Lời giải**

Ta có:

Vì 





**Bài 2.** Chứng minh: 

**Lời giải**

Ta có  Ta đi tìm số dư của  khi chia cho 

Ta có:



Vì  hay 



Vậy 

**Bài 3.** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Đặt 

Ta có và 

Vì 



Mặt khác  (mod 31) nên ta đi tìm số dư của  khi chia cho 

Ta có  nên 

Vì và 

hay 

 

do  

Từ  và  

Vì 

Từ  và 

Vậy 

Ta lại có ; 

Vì ,  và  hay 

**Bài 4:** Chứng minh rằng  chia hết cho 31

**Lời giải**

Để chứng minh  chia hết cho 31 ta chứng minh 

Ta có :  mà 

nên ta có 





Mặt khác 

Nên 

Vậy  chia hết cho 31 (đpcm)

**Bài 5:**  Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số  chia hết cho 133

**Lời giải**

Ta có: 

Vì nên 

suy ra  

Mặt khác: 

Mà nên  

Cộng vế  và ta được 

Vậy chia hết cho 133 (đpcm)

**Bài 6:** Chứng minh 

**Lời giải**

Ta có mà nên 

Có 

Suy ra .

Vậy 

**Bài 7:** Chứng tỏ rằng: chia hết cho 10

**Lời giải**

Ta có: 







Hay 

Vậy 

**Bài 8** : Chứng minh rằng: chia hết cho 31

**Lời giải**

Ta có , mà nên 

Vì 

chia hết cho 31

**Bài 9**: Chứng minh rằng: chia hết cho 7

**Lời giải**

Cách 1: Ta có 





Mà 

 

Ta lại có : 

Nên 

Từ  và chia hết cho 7.

Cách 2:Ta có 

Mặt khác: +) 

+) 

 

+) 

+)  

Từvà đpcm

**Bài 10**: CMR: (với ) chia hết cho 7

**Lời giải**

Theo định lý Fermat ta có:





Ta tìm dư trong phép chia là và cho 10

Có 



Có 



Ta có:





mà

Vậy  với 

**Bài 11:** CMR:  với 

**Lời giải**

Ta có:

Vì 

Theo định lý Fermat ta có:





Vậy  với  (đpcm)

**Bài 12**: CMR: Nếu là số nguyên dương: 

**Lời giải**



**Bài 13**: Chứng minh định lý Fermat nhỏ: *Giả sử là số nguyên tố bất kỳ, khi đó với mọi số tự nhiên  ta có* *chia hết cho *

**Lời giải**

Ta có:

Nếu chia hết cho định lý được chứng minh.

Nếu không chia hết cho thì , nên 

 chia hết cho.

**Dạng 2. Dùng đồng dư để tìm số dư trong phép chia**

1. **Phương pháp giải.**

- Với hai số nguyên và luôn có duy nhất cặp số nguyên sao cho Để tìm số dư trong phép chia cho ta cần tìm sao cho   
**-** Tìm số dư của phép chia tổng cho :

* **Phương pháp :** Tìm số dư của cho :

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia cho :

+  là số dư của phép chia tổng cho .

* **Giải thích :**

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi đó: 

Vậy số dư của phép chia  cho  chính là số dư của phép chia tổng cho .

**-** Tìm số dư của phép chia hiệu cho :

* **Phương pháp:** Tìm số dư của  cho :

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia cho :

* Nếu thì số dư cần tìm là .
* Nếu thì số dư cần tìm là .
* Nếu , thì hiệu chia hết cho .Tức là .
* **Giải thích:**

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi đó: 

Vậy số dư của phép chia cho  cũng chính là số dư của phép chia hiệu cho .

**-** Tìm số dư của phép chia tích cho :

* **Phương pháp: Tìm số dư của**  **cho** **:**

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia  cho .

+ Tìm số dư  của phép chia cho .

+  là số dư của phép chia tích cho .

* **Giải thích :**

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi  chia cho  dư , ta viết: .

+ Khi đó: 

Vậy số dư của phép chia cho  cũng chính là số dư của phép chia tích cho .

1. **Bài toán.**

**Bài 1** : Tìm số dư của cho 13

**Lời giải**

Ta có 

Vì , nên (mod 13)do đó (mod 13)

hay 



và 

nên .

Vậy chia cho 13 có số dư là 3

**Bài 2** : Tìm số dư của  chia 11

**Lời giải**

Sử dụng dấu hiệu chia hết cho 11 : *Một số được gọi là chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa các tổng chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn kể từ trái sang phải chia hết cho 11.*

Ví dụ : Xét xem số 5016 có chia hết cho 11 ?

Ta có . Vì 

**Lời giải**

Ta có 

, mà (vì )



Vậy chia 11 dư 5.

**Bài 3** : Tìm số dư khi chia cho 7.

**Lời giải**

Ta có : 

Mà hay 

hay

Vậy chia 7 dư 5.

**Bài 4** : Chứng minh rằng các số và đều là bội số của 7

**Lời giải**

Ta có 

Vậy *A* là bội của 7

Từ , mà 



Vậy *B* là bội của 7

**Bài 5** : Tìm số dư trong phép chia cho 9

**Lời giải**

Ta có: , mà 



Vậy chia cho 9 dư là 4.

**Bài 6** : Tìm dư trong phép chia cho 13.

**Lời giải**

Ta có mà 



.

Vậy chia cho 13 dư 9 .

**Bài 7**: Tìm dư trong phép chia cho 12

**Lời giải**

Ta có hay  

hay  

Từ và chia cho 12 dư 2.

**Bài 8** : Tìm số dư của khi chia cho 3 và khi chia cho 5?

**Lời giải**

\* Số dư của khi chia cho 3

Cách 1: Ta có 





Vậy *A* khi chia cho 3 dư 2.

Cách 2: Ta thấy: 

vì 



778 ≡ 1 (mod 3)

Vậy 

Vậy *A* khi chia cho 3 dư 2.

\* Số dư của khi chia cho 5

Ta có 





(mod 5)

Hay 





Mà 

Vậy 

Vậy *A* chia cho 5 dư 2.

**Bài 9**: Tìm số dư của khi chia cho 11 và khi chia cho 13 .

**Lời giải**

Ta có : 

Và 



A chia cho 11 dư 2

Ta có :

Và 



 A chia cho 13 dư 7 .

**Bài 10**: Cho 

a) Tìm số dư của A khi chia cho 100

b) Tìm số dư của *A* khi chia cho 1000

**Lời giải**

1. Ta có: 

Trước hết ta đi tìm số dư của A khi chia cho 25.

Ta có 

Vì 

hay 

Vậy *A* có thể viết dưới dạng: 

Mặt khác 





Vậy *A* chia cho 100 dư 16.

b) Ta có: và 

Trước hết ta tìm số dư khi chia *A* cho 

Từ hằng đẳng thức:ta thấy nếu thì 

Vì 





Vậy 

Vì 

Vậy *A* có dạng: 

Vậy *A* chia cho 1000 dư 16.

**Bài 11**: Tìm số dư khi chia cho 13

**Lời giải**

Ta có: 









Vậy chia hết cho 13.

**Bài 12**: Bạn Thắng học sinh lớp 6A đã viết một số có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó là 14. Bạn Thắng đem số đó chia cho 8 thì được số dư là 4, nhưng khi chia cho 12 thì được số dư là 3.

1. Chứng minh rằng bạn Thắng đã làm sai ít nhất một phép tính chia.
2. Nếu phép chia thứ nhất cho 8 là đúng thì phép chia thứ hai cho 12 có số dư là bao nhiêu ? Hãy tìm số bị chia.

**Lời giải**

1. Gọi số đó là 

Vì chia cho 8 dư 4, nên 

Và chia cho 12 dư 3, nên 

(Mà là số chẵn, còn là số lẻ). Do vậy bạn Thắng đã làm sai một phép chia.

b) Vì  

Nếu  

Từ và chia cho 12 dư 8

Do là số chẵn mà 

Nếu (loại - vì a là số có một chữ số khác 0)

(loại)

(loại)





Vậy số cần tìm là 86 hoặc 68. Số bị chia là 68.

**Bài 13.**Tìm số dư khi chia cho 

**Lời giải**

Ta thấy (1)

Lại có hay  (2)

Từ (1) và (2) suy ra tức là chia  thì dư .

**Bài 14.** Tìm số dư của phép chia  cho .

**Lời giải**

Ta có:  (1)

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 

Hay 

Vì nên là số dư của phép chia  cho .

**Bài 15**. Tìm số dư của phép chia  cho .

**Lời giải**

Ta có: 











Từ (1) và (2) suy ra:





Vậy số dư của phép chia cho  là .

**Bài 16**.Tìm số dư của phép chia  cho .

**Lời giải**

**Ta có:**



 

 















Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:





Vậy số dư của phép chia  cho  là *.*

**Bài 17**. Tìm số dư trong phép chia số cho .

**Lời giải**

**Cách 1:**

Nếu thêm bớt 1 vào số  thì ta có lời giải bài toán một cách dễ dàng: 

Vì 

Suy ra  chia cho  dư .

**Cách 2:**Ta có: 



Vậy số  khi chia cho  thì dư .

**Bài 18**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Tìm được: 



Suy ra: 

Vậy số dư của phép chia cho  là .

**Bài 19**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Tìm được: 



Suy ra: 

Vậy số dư của phép chia cho  là .

**Bài 20**. Tìm số dư của phép chia cho.

**Lời giải**

Ta có: 

Tìm được: 



Suy ra: 

Vậy số dư của phép chia cho  là .

**Bài 21**. Tìm số dư của phép chia cho.

**Lời giải**

Ta có: 

Tìm được:



Suy ra: 

Vậy .

**Bài 22**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Ta có: 

Tìm được: 

 . 

Vậy .

**Bài 23**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Tìm được :



Suy ra: 

Vậy .

**Bài 24.** Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Tìm được: 



Suy ra: 

Vậy .

**Bài 25**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Vì  là số nguyên tố vànên:

 (hệ quả của đl Fermat)

.

Ta có:, với mọi  (tính chất)

nên  Khi đó 

Áp dụng với ta được:







…



Suy ra:.

Vậy .

**Bài 26**. Tìm số dư của phép chia cho .

**Lời giải**

Vì  là số nguyên tố nênvới mọi số nguyên a (định lí Ferma), do đó:







…



Suy ra: 



Vậy số dư của phép chia cho  là.

**Dạng 3. Tìm n chữ số tận cùng của một lũy thừa**

**I.Phương pháp giải.**

Tìm 1; 2 hay 3 chữ số tận cùng của số có dạng  là trường hợp đặc biệt của phép chia có dư, nó chính là tìm dư trong phép chia  cho hay .

**Bài toán tổng quát 1.** Tìm 1 chữ số tận cùng của :   
\* Nếu a có chữ số tận cùng là 0 , 1 , 5 hoặc 6 thì lần lượt có chữ số tận cùng là hoặc  .   
\* Nếu a có chữ số tận cùng là hoặc  , ta có nhận xét sau

Với 



  


Do đó:

a/ Để tìm 1 chữ số tận cùng của  với a có số tận cùng là  ta lấy n chia cho 4 . Giả sử với   
- Nếu 

- Nếu 

**Bài toán tổng quát 2.**Tìm 2 chữ số tận cùng của 

Ta có nhận xét sau :   
  
  
  
  
Mà   
và   
 Suy ra kết quả sau với   
nếu   
nếu   
nếu  
nếu 

Vậy để tìm 2 chữ số tận cùng của  ta lấy số mũ n chia cho 

**Bài toán tổng quát 3.**Tìm 3 chữ số tận cùng của 

Ta có :   
nếu   
 nếu   
nếu   
nếu 

Để tìm 3 chữ số tận cùng của  , ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ  .

**Bài toán tổng quát 4.**Tìm bốn, năm, sáu chữ số tận cùng của một số

Để tìmbốn, năm, sáu chữ số tận cùng của một số ta lần lượt tìm dư của số đó cho 

**II.Bài toán.**

**Bài toán tổng quát 1.** Tìm 1 chữ số tận cùng của 

**Bài 1.**Tìm chữ số hàng đơn vị của số 

**Lời giải**











Vậy chữ số hàng đơn vị của số  là 9

**Bài 2.** Chứng minh rằng là một số nguyên.

**Lời giải**

Ta có 



là một số nguyên.

**Bài 3.** Chứng minh rằng  với mọi số tự nhiên .

**Lời giải**

Theo định lí Fermat , do đó ta cần tìm số tận cùng của 

Ta có 



**Bài 4.**Tìm chữ số tận cùng của số

**Lời giải**

**Cách 1**. Ta có



Vậy chữ số tận cùng của số**là 2.**

**Cách 2.** Xét các lũy thừa của 2 khi chia cho 10 ta được kết quả sau



Hàng thứ 2 cho thấy rằng các số dư lặp lại tuần hoàn chu kì 4 số 

Ta có  nên số dư khi chia  cho 10 là 2

Vậy chữ số tận cùng của số là 2.

Cách 3.Ta có: 

Mà 

Từ đó: , mà 

Nên: 

Vậy chữ số tận cùng của số là 2.

**Bài 5.**Tìm chữ số hàng đơn vị của 

**Lời giải**

Ta có:









các số dư lặp lại tuần hoàn chu kì 4 số 

Ta có 

Vậy chữ số tận cùng của số là .

**Bài 6.**Tìm chữ số tận cùng của .

**Lời giải**

Ta cần tìm số dư của phép chia cho .

**Cách 1**: (đồng dư)

Tìm được:

Vậy chữ số tận cùng của  là chữ số .

**Cách 2** :







Vậy chữ số tận cùng củalà chữ số .

**Bài 7.**Tìm chữ số hàng đơn vị của 1242014 .

**Lời giải**

Ta cần tìm số dư của phép chia  cho .

**Cách 1**: (đồng dư)

Tìm được:

Vậy chữ số hàng đơn vị của là chữ số .

**Cách 2**:



Vì  có chữ số tận cùng là chữ số  nên  cũng có tận cùng là chữ số .

Vậy chữ số hàng đơn vị của  là chữ số .

**Bài 8.**Tìm chữ số hàng đơn vị của.

**Lời giải**

Ta cần tìm số dư của phép chia cho .

**Cách 1**: (đồng dư )

Tìm được:







Vậy chữ số hàng đơn vị của là chữ số .

**Cách 2**:

có tận cùng là chữ số  nên  cũng có tận cùng là chữ số .

, vì  có chữ số tận cùng là nên .cũng có chữ số tận cùng là .



Vậy chữ số hàng đơn vị của 125234.67900 là chữ số .

**Bài 9.**Tìm chữ số hàng đơn vị của .

**Lời giải**

có chữ số tận cùng là 6

có chữ số tận cùng là 9

Vậy chữ số hàng đợn vị của 1242014  + 45672014 là chữ số.

**Bài 10.**Tìm chữ số hàng đơn vị của .

**Lời giải**

Ta cónên là một số tự nhiên .

có chữ số tận cùng là .

Tính được , nên có chữ số tận cùng là .



Vậy chữ số hàng đợn vị củalà chữ số .

**Bài 11.**Tìm chữ số tận cùng của .

**Lời giải**

* **Nhận xét**:

**+** Các số có chữ số tận cùng là 4 khi nâng lên lũy thừa bậc thì chữ số tận cùng là .

**+** Các sốđều có dạng  .

luôn có chữ số tận cùng là , với mọi số . Tức là:







…



Tổng trên có số hạng, mỗi số hàng đều có tận cùng là .



Vậy chữ số tận cùng của là .

**Bài 12.** Hỏi số sau đây là số nguyên hay là phân số:

a) 

b) 

**Lời giải**

a)Ta xét khi chia cho 10.

Ta có 



. Vậy A là số nguyên.



Tương tự ý a)Ta xét khi chia cho 10.

Ta có



. Vậy B là số nguyên.

**Bài 13.**Chứng minh rằng: chia hết cho 10.

**Lời giải**

Ta có \*  có tận cùng là chữ số  nên  cũng có tận cùng là chữ số , tức là:



\*  có tận cùng là chữ số 1 nên  cũng có tận cùng là chữ số 1, tức là:



\*  có tận cùng là chữ số  và *,* nên 20182015 có tận cùng là chữ số 2 , tức là:



Từ (1), (2), (3) suy ra:



Vậy chia hết cho .

**Bài toán tổng quát 2.** Tìm 2 chữ số tận cùng của 

**Bài 1.**Tìm hai chữ số tân cùng của 

**Lời giải**

Ta có : 

Do đó : 

Vậy có hai chữ số tận cùng là .

**Bài 2.**Tìm hai chữ số tận cùng của 

**Lời giải**

Ta có 





Vậy hai chữ số tận cùng của là 13

**Bài 3.** Tìm chữ số hàng chục, hàng trăm của số 232005.

**Lời giải**



Do đó:



Vậy chữ số hàng chục của số 232005 là 4 (hai chữ số tận cùng của số 232005 là 43)

**Bài 4.** Tìm chữ số hàng chục của số 

**Lời giải**

Ta có:



suy ra: 

Mặt khác: . Vậy chữ số cần tìm là: 8.

**Bài 5.**Tìm hai chữ số tận cùng của

**Lời giải**

Ta có

Vậy hai chữ số tận cùng của là 

**Cách 2.** Xét các lũy thừa của 2 khi chia cho 100 ta được kết quả sau:



Các số dư lặp lại tuần hoàn theo chu kì 20 số (từ số 4 đến số 52)

Ta có số dư khi chia  cho  là 

số dư khi chia  cho  là

số dư khi chia  cho  là 



Vậy hai chữ số tận cùng của  là 

**Bài 6.**Tìm chữ số hàng chục của .

**Lời giải**

Ta cần tìm số dư của phép chia 1234123 cho 100.

Tìm được:

Như vậy 1234123 chia  dư , do đó chữ số hàng chục là chữ số .

**Bài 7.** Tìm 2 chữ số tận cùng của số:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 



Mặt khác: 



Vậy 2 chữ số tận cùng của  là .

b) 

Ta có: 







 



Vậy hai chữ số tận cùng của  là .

**Bài 8.**Tìm hai chữ số tận cùng của số .

**Lời giải**

Ta có:

Ta cần tìm số dư của phép chia cho .

**Cách 1**: (Đồng dư)

Tìm được:



Vậy hai chữ số tận cùng của số là .

**Cách 2**:Ta có:





Vậy hai chữ số tận cùng của số là.

**Bài 9.** a) Tìm chữ số tận cùng của 

b) Tìm hai chữ số tận cùng của 

**Lời giải**

1. Tìm chữ số tận cùng của một số là tìm số dư trong phép chia của số đó cho 10.

Vì . Do là số lẻ nên .

Vậy chữ số tận cùng của là 9.

1. Tìm hai chữ số tận cùng của một số là tìm số dư trong phép chia của số đó cho 100.

Ta có: nên 

Mà nên 

Suy ra 

( Vì)

Do đó 

Vậy hai chữ số tận cùng của là 01.

**Bài toán tổng quát 3.**Tìm 3 chữ số tận cùng của 

**Bài 1.**Tìm chữ số hàng trăm của số 

**Lời giải**

Ta có:











Nên ba chữ số tận cùng của số 232005 là số 

Vậy chữ số hàng trăm của số 232005  là số 

**Bài 2.**Tìm các chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm của số tự nhiên:



**Lời giải**

Ta có:



















Do đó chu kỳ lặp lại là 10,  có ba chứ số cuối là: .

Vậy chữ số hàng đơn vị, hàng chục và hàng trăm của số tự nhiên: 

là: 

**Bài 3.**Tìm chữ số hàng trăm của : 

**Lời giải**

Ta có:

















Vậy chữ số hàng trăm của :  là 3.

**Bài 4.**Tìm chữ số hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị của .

**Lời giải**

Ta cần tìm số dư của phép chia  cho .

Tìm được:

Số dư của phép chia  cho  là .

Vậy chữ số hàng trăm là ; chữ số hàng chục là ; chữ số hàng đơn vị là .

**Bài toán tổng quát 4.**Tìm bốn, năm, sáu chữ số tận cùng của một số

**Bài 1.**Tìm 4 chữ số tận cùng của 

**Lời giải**

Ta có 







Vậy 4 chữ số tận cùng của là .

**Bài 2.**Tìm 5 chữ số tận cùng của 

**Lời giải**

Ta có











lại có 



Vậy 5 chữ số tận cùng của là 03125.

**Bài 3.** Tìm sáu chữ số tận cùng của số .

**Lời giải**

Ta có: 

Hay 

Hay 



=>chia cho  dư .

Vậy  có 6 chữ số tận cùng là .

**Dạng 4. Phương trình nghiệm nguyên, các bài toán về số nguyên tố, số chính phương**

**I.Phương pháp giải.**

- Vận dụng các tính chất:



Nếu  và thì: 

**II.Bài toán.**

**Bài 1.** Giải phương trình nghiệm nguyên 

**Lời giải**

Giả sử  là các số nguyên thỏa mãn phương trình Ta thấy  và  đều chia hết cho  nên  (do  và nguyên tố cùng nhau).  
Đặt  thay vào phương trình ta được .  
Do đó: . Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm  với  là số nguyên tùy ý.

**Bài 2.**Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

**Lời giải**

Phương pháp 1: Ta có  và  nên  (vì  ).  
Đặt  thay vào  ta được: 

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: .  
Phương pháp 2: Từ ,  
Để  Mà  Đặt   
Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: .

**Bài 3.** Giải phương trình nghiệm nguyên .

**Lời giải**

Ta có   
Ta phải biến đổi tiếp phân số  để sao cho hệ số của biến là   
Ta thêm, bớt vào tử số một bội thích hợp của 

  
Từ đó , Để , do .  
Đặt   
Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: .

**Bài 5.**Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

**Lời giải**

Ta có: 

 ( vì nếu hoặc thì ).

 (trong đó k ) thay vào (\*) ta có :

Vậy 

**Bài 6.**Giải phương trình nghiệm nguyên sau: 

**Lời giải**

Ta có  là  số tự nhiên liên tiếp nên 

Mặt khác ƯCLNnên 

Với  thì  còn  suy ra phương trình không có nghiệm.

Với ta có :



Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**Bài 7.**Tìm nguyên dương thoả mãn: 

**Lời giải**

 (\*\*)

Ta có 

Suy ra là số lẻ mà và là hai số lẻ liên tiếp

Từ(\*\*) 

Ta có 

Nếu thì và đều chia hết cho(*vô lí*)

Vậy 

**Bài 8.**Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

**Lời giải**

Ta có nguyên dương 

Mà:

Nếu chẵn thì ; nếu lẻ thì 

còn Do đó phương trình vô nghiệm.

**Bài 9.**Tìm các số nguyên dương biết:

**Lời giải**

Ta có: (\*)

Nếu () thì 

Nếu () thì 

Nếu () thì 

Vậy với thì  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra không tồn tại thỏa mãn bài toán.

**Bài 10.**Chứng minh rằng các số sau không phải là số nguyên tố.





**Lời giải**

a) Ta có 

mà 

Vậy không là số nguyên tố.



Ta thấy 





Vậy A không là số nguyên tố

**Bài 11.**Số là số nguyên tố hay hợp số. 

**Lời giải**

Với, ta có . Từ đó gợi ý cho ta xét xem chia hết cho  hay không.

Vì nên ta xét chia  dư bao nhiêu. Thật vậy:

.



Vậy  hợp số

**Bài 12.** Chứng minh rằng: Các số có dạng

 đều không phải số nguyên tố.

**Lời giải**

Với ta có**.**Từ đó gợi ý cho ta xét xem  chia hết cho  hay không

Ta có: 

Vì 





Vậy luôn chia hết chonên  không là số nguyên tố.

**Bài 13.**Chứng minh rằng: Nếu là một số nguyên tố và không là ước của số nguyên thì 

**Lời giải**

Xét dãy số . Tất cả các số này đôi một không đồng dư với nhau theo môđun. Do đó các số cũng đôi một không đồng dư với nhau theo môđun. Bởi vì ngược lại nếu có mà (với là hai số nào đó của dãy số (vô lí)

Hơn nữa mỗi một số của dãy đồng dư với đúng một trong các số theo môđun .

hay .

Vì 

**Bài 14.**Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương:

a) 

b) 

c)

**Lời giải**

***Cách 1:*** Ta sử dụng tính chất của số chính phương để chứng minh các số trên không phải là số chính phương.

a) Ta có: Các số  là số chính phương không chia hết cho  nên chia  dư , còn . Số chia cho  dư  nên  không là số chính phương.

b) Các số  là số chính phương chẵn nên chia hết cho . Các số  là các số chính phương lẻ nên chia  dư . Số B chia  dư nên không là số chính phương.

c) Tương tự ý b) ta có chia cho  dư nên không là số chính phương.

***Cách 2:****Nếu ta sử dụng Đồng dư thức thì có 1 cách làm chung cho cả 3 ý trên và cách làm đơn giản hơn nhiều.*

a) 

. Nên  không là số chính phương.

b) 

. Nên  không là số chính phương.

c) 

. Nên  không là số chính phương.

**Bài 15.** Chứng minh rằng số  không là số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: 









Mà số chính phương chia cho chỉ dư hoặc.

Vậy A không là số chính phương.

**Bài 16.** Chứng minh rằng  không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương *(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)*

**Lời giải**

Với mọi  ta có: 

 chia cho dư  vì

Và  chia cho dư  vì

Do đó  chia cho dư 

Ta có:  là số nguyên tố. Vậy A không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương 

**Bài 17.** Tìm số nguyên dương để biểu thức sau là số chính phương: 

**Lời giải**

Ta có:   
Với  thì  chia hết cho   
Với  thì  chia hết cho  
Với  thì  chia hết cho   
Do đó  luôn chia hết cho   
Nên  chia cho thì dư nên  có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên  không là số chính phương.  
Vậy không có giá trị nào của  thỏa để  là số chính phương.

**Dạng 5. Sử dụng các dấu hiệu, tính chất của phép chia trong tập hợp số nguyên**

**I.Phương pháp giải.**

**Sử dụng**

**\* Dấu hiệu chia hết cho** 

**\* Chữ số tận cùng của** 

**\* Tính chất chia hết của một tổng**

**II.Bài toán.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương thì :

chia hết cho 

**Lời giải**

Ta có = 

=

=

= 

Vậy  với mọi  là số nguyên dương.

**Bài 2**. Chứng tỏ rằng:  là số chia hết cho 

**Lời giải**



chia hết cho .

**Bài 3.** Cho  và  là số nguyên tố thoả mãn:  = 

Chứng minh rằng :

**Lời giải**

+ Nếu  chia hết cho  do  là số nguyên tố và 

 hoặc khi đó từ ta có 

+ Nếu không chia hết cho  , từ ( 1) 

Do  là số nguyên tố và  và 

và (loại)

Vậy 

**Bài 4.** a) Số  có chia hết cho  không? Có chia hết cho không ?

b) Chứng minh rằng:  chia hết cho 

**Lời giải**

a)Ta có  (  là số tự nhiên khác không)



Suy ra : chia hết cho, không chia hết cho 

b) Ta có 3638 = (362)19 ( )



Suy ra :

**Bài 5.**Cho hai số tự nhiên ,  thỏa mãn: . Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Nếu  ĐPCM

Nếu 



Nên  ĐPCM.

**Bài 6.**  a) Chứng minh rằng: 

b) Cho đa thức .

CMR nếu chia hết cho  với mọi giá trị của  thì  đều chia hết cho 

**Lời giải**

a) Ta có  và 

,

1. Ta có do f(0) 

, do  và chia hết cho  vì  ,  do và  chia hết cho 

Vậy đều chia hết cho.

**Bài 7**.Cho  là số nguyên tố . Chứng minh  là hợp số.

**Lời giải**

Ta có . Do chia hết cho  và là số nguyên tố suy ra chia hết cho  hay 2n -1 là hợp số

**Dạng 6. Xét tập hợp số dư của phép chia trong tập hợp số nguyên**

**I.Phương pháp giải. Sử dụng tính chất**

**\*** 

**\***  Khi chia số nguyên dương liên tiếp cho  luôn nhận được hai số dư bằng nhau.

\* Trong  số nguyên liên tiếp, luôn có duy nhất  số chia hết cho *n.*

**II.Bài toán.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  ta có :.

**Lời giải**

Ta có hoặc  là số chẵn với mọi số tự nhiên  nên 

Lấy n chia chota được :

Với 

Với 

Với 

**Bài 2.** Cho số nguyên không chia hết cho  và Chứng minh: 

**Lời giải**

Vì a không chia hết cho  và nên  có dạng :

Với 

Với 

**Bài 3.** Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho: 

**Lời giải**

Ta có: 

 ,

Khi đó:  hoặc  hoặc 

**Bài 4.** Chứng minh rằng có vô số tự nhiên n sao cho  và chia hết cho 

**Lời giải**

Đặt 

Chọn  sao cho . Vậy với mọi số đều thỏa mãn.

**Bài 5.** Chứng minh rằng nếu  thì 

**Lời giải**

Vì 

Khi đó: 

Thấy:  và 

Với 

Với 

**Bài 6.** Tìm tất cả các số tự nhiên  để 

**Lời giải**

Lấy  chia cho  ta có: 

Với 

Với  ,

Mà  chia  dư 

Với 

Mà  chia  dư 

Vậy với  thì 

**Bài 7.** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Lấy n chia cho  ta được: 

Với 

Với 

Với 

**Bài 8.** Cho  và  , Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Xét 

**Bài 9.** Chứng minh rằng nếu  thì 

**Lời giải**

Vì 

Với 

**Bài 10.** Tìm số tự nhiên  để: 

**Lời giải**

Xét 

Ta có: 

Xét các TH cụ thể ta được: 

**Bài 11.** Cho hai số tự nhiên ,  thỏa mãn: . Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Nếu  ĐPCM

Nếu 



Nên  ĐPCM.

**Bài 12.** Tìm tất cả các số nguyên sao cho :

**Lời giải**

Ta có : 

Nếu  thỏa mãn

Nếu 

**Bài 13.** Cho hai số tự nhiên . Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có:

Mặt khác:



**Bài 14.** Cho a, b là các số nguyên dương sao cho  chia hết cho tích 

Tính giá trị của biểu thức:

**Lời giải**

Gọi  , ta có: và 

Vì  và  và 

Vì  và 

Vậy 

**Bài 15.** Cho là hai số nguyên tố cùng nhau. Hãy tìm ước số chung lớn nhất của hai số 

và

**Lời giải**

Gọi , vì  cùng tính chẵn lẻ. khi đó :

và (1)

Nếu chẵn thì lẻ và  chẵn, Từ (1)

Nếu lẻ thì  lẻ, Từ  , tương tự : 

Vì 

**Bài 16.** Cho số tự nhiên  , Chứng minh rằng: nếu  thì 

**Lời giải**

Ta có: , ta cần chứng minh 

Mặt khác :  có chữ số tận cùng là 

Đặt 

Nếu  có tận cùng là 

Nếu  tận cùng là 



**Bài 17.** Cho số tự nhiên  , Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Đặt:

Mặt khác, với n lẻ ta có:

Nên 



Mà 

**Bài 18.** Cho  . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Ta có:





Mà 

**Bài 19.** Cho  , thỏa mãn: ,

Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Đặt  , Hơn nữa 

Thì trong đó các số bằng và  là bằng nhau. Giả sử có m số  và  số 

và và 

Từ đó ta được  là số chẵn => chia hết cho .

**Bài 20.** Tìm hai số nguyên dương a, b sao cho: và 

**Lời giải**

Ta có:

Vì 

Chọn 

**Dạng 7. Sử dụng tính chất**  **lẻ**

**I.Phương pháp giải.**

Sử dụng tính chấtlẻ, 

**II.Bài toán.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Ta có: , ta cần chứng minh 

Ta có : 

Áp dụng tính chất :  với mọi  tự nhiên và 

Khi đó :  và . Vậy Tương tự :  Khi đó 

**Bài 2.** Cho  , CMR : 

**Lời giải**

Ta cần chứng minh  và 

Ta có : 

Áp dụng tính chất : 

Tương tự : 

**Bài 3.** Cho  , Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có:

Vì  và 

**Bài 4.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có: 

**Bài 5.** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:

Vì  và 

**Bài 6.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có:

**Bài 7.** CMR với mọi số tự nhiên  ta có : 

**Lời giải**

Ta có:

Vì  nên ta có đpcm

**Bài 8.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có:

**Bài 9.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Tách .

Khi đó:

Lại có: , và 

Khi đó:

Mặt khác: ,

Mà  và 

Vì nên 

**Bài 10.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Với 

Với 



 

**Bài 11.** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 



**Bài 12.** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

**Bài 13.** Chứng minh rằng:  và  là số chẵn

**Lời giải**

Đặt  hay 

Mặt khác:  và 

**Bài 14.** Tìm giá trị của  để: 

**Lời giải**

Tách .

Khi đó:

Lại có: , và 

Khi đó:

Mặt khác: ,

Mà  và 

Mặt khác 

Vậy với mọi số tự nhiên n.

**Bài 15.** Tìm số tự nhiên để 

**Lời giải**

Ta có:

**Bài 16.** Cho là hai số chính phương lẻ liên tiếp, Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Đặt  , Khi đó ta có:

và3

**Bài 17.** Cho ba số nguyên dương thỏa mãn:. Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có:, đặt 

Nếu  đều không chia hết cho  chia hết cho  dư 

 , Do đó có ít nhất  số chia hết cho . Vậy 

Nếu đều không chia hết cho  chia  dư  hoặc 

chia  dư  hoặc  hoặc  , Do đó có ít nhất  số chia hết cho 

Nếu là các số lẻ  chia  dư 

Do đó  trong hai số phải là số chẵn.

Giả sử  là số chẵn:

+ Nếu  là số chẵn 

+ Nếu  là số lẻ, mà  là số lẻ 

chẵn

Vậy 

**Bài 18.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có: ,

Thấy  không đồng thời cùng chẵn hoặc cùng lẻ 

**Dạng 8. Sử dụng phương pháp quy nạp không hoàn toàn trong tập hợp số nguyên**

**I.Phương pháp giải.**

+ Chứng minh bài toán đúng với  nhỏ nhất

+ Giả sử bài toán đúng với 

+ Chứng minh bài toán đúng với thì kết luận.

**II.Bài toán.**

**Bài 1.** Chứng minh 

**Lời giải**

Với  đúng

Giả sử  và 

Ta cần chứng minh với  thì 

Thật vậy:

. Vậy 

**Bài 2.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Với  đúng

Giả sử và 

Ta cần chứng minh với  thì 

Thật vậy:



Mà; 



Vậy 

**Bài 3.** Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Với  đúng

Giả sử  và 

Ta cần chứng minh với  thì 

Thật vậy:

Mà ; 

Vậy 

## 🙢**HẾT**🙠