**Dạng 1: TỔNG LŨY THỪA**

**I-BĐT VÀ CỰ TRỊ ĐẠI SỐ**

**Phương pháp:**

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ, Nếu muốn chứng minh lớn hơn 1 giá trị k nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn, và ngược lại

**Bài 1:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:



Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.





**Bài 2**: Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

và Chứng minh 

Ta có:

đến đây, ta sẽ so sánh  với  như sau:

Ta có: bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số  với 96 để được hai phân số cùng tử rồi so sánh khi đó ta có:  (1)

Chiều thứ hai, ta cần chứng minh:

Ta làm tương tự như sau :

 (2)

Từ (1) và (2) ta có : 

**Bài 3:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta biến đổi:

**Bài 4:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhận thấy bài này là tổng cùng lũy thừa nhưng cơ số lại chẵn, nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa hai liên tiếp như sau :





**Bài 5:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhận thấy bài này có dạng tổng lũy thừa cùng cơ số, nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A

Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được,

Ta tính tổng A như sau:

Sau đó lấy 2A trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được :

, đặt  và tính tổng B theo cách như trên ta được : , thay vào A ta được : 

**Bài 6:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tính tượng tự như bài 5, ta có: ,

Đặt , và tính B rồi thay vào tổng A ta được



**Bài 7:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có :

**Bài 8:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có :

**Bài 9:** So sánh  với 

**Lời giải**



**Bài 10:** Chứng minh rằng với số tự nhiên  thì  không là số tự nhiên

**Lời giải**

Ta có : 

Mặt khác ta thấy 

Vậy ta có : 

Vậy với số tự nhiên  thì  không là số tự nhiên

**Bài 11:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có 

**Bài 12:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

, Đặt tổng trong ngoặc bằng B rồi tính B ta có :

, thay vào A ta được :

 (1)

Mặt khác : (2)

Từ (1) và (2) ta được 

**Bài 13:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tính tổng A , ta được : ,

Đặt tổng trong ngoặc bằng 

**Bài 14**: Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có : 



**Bài 15:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có : 



**Bài 16:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Bài 17**: Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Bài 18:** Chứng minh rằng:  có giá trị không nguyên

**Lời giải**

Tính  nên M < 1 và M > 0 vậy M không có giá trị nguyên

**Bài 19:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Bài 20:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Bài 21**: Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

, Đặt tổng trong ngặc bằng B ta có:





**Bài 22**: Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 



**Bài 23:** Chứng minh rằng:  thì 

**Lời giải**

Ta có : 

Mặt khác :



Vậy 

**Bài 24:**Cho . Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Chứng minh rằng:

TH1: 

TH2: 

**Bài 25:**Cho .Chứng minh rằng: A < 2

**Lời giải**

Ta có:

**Bài 26:**Chứng minh rằng:

a,  b, 

**Lời giải**

a, Ta có: 

Nên 

b, Ta có: 

Đặt , Thay vào A ta được:



**Bài 27:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Đặt  Nhân 49 A 

**Bài 28:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có:  ,  , tương tự như vậy :



Mặt khác:  , ,

Tương tự như vậy:



**Bài 29:** Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có : vậy 

**Bài 30:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**





**Bài 31:**Cho .Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Chứng minh rằng:



TH1: 

TH2: 

**Bài 32:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Xét số hạng tổng quát: 

Do đó:

Với , ta có:

**Bài 33:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Bài 34:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**



**Dạng 2: TỔNG PHÂN SỐ TỰ NHIÊN**

**Phương pháp:**

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 -7 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường

**Bài 1:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có 

**Bài 2:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có

**Bài 3:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có =

Ta có  

Vậy 

**Bài 4:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhóm thành 2 ngoặc: Khi đó ta có: 



**Bài 5:**So sánh A và B biết : và 

**Lời giải**



Tổng B có 15 số



Vậy A > B

**Bài 6:**Cho .Chứng minh rằng: M<2

**Lời giải**

Tổng M có 13 số

Ta có:  và 

Vậy 

**Bài 7:**Cho . Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ta có 

Ta có 

Vậy 

**Bài 8:**Cho  .Chứng minh rằng: 3<S<8

**Lời giải**

Tổng trên có 30 số hạng:

Ta có: 

Ta có 

Vậy

**Bài 9:**Chứng minh rằng:  thì 

**Lời giải**

Ta thấy tổng A có 100 số, như vậy ta sẽ nhóm thành 50 ngoặc, mỗi ngoặc sẽ có hai phân số,

gốm 1 phân số đứng đầu và 1 phân số đứng cuối, cứ như vậy dồn sâu vào trong tổng





,

Lúc này ta sẽ so sánh tất cả với chung 1 phân số đầu hoặc cuối,

TH1: Ta chứng minh  thì ta có:

 (1)

TH2: Ta chứng minh  ta có:

 (2)

Từ (1) và (2) 

**Bài 10:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhận thấy tổng  chính là tổng bài 9

Nên ta chứng minh được , mà 

**Bài 11:**Cho  Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Thấy rằng tổng A có 60 số hạng

TH1: Ta chứng minh  bằng cách nhóm 2 số một ngoặc thông thường

Ta có: 



TH2: Tuy nhiên để chứng minh , nếu chúng ta làm như trên thì sẽ không chứng minh được

Lý do: vì việc chứng minh nhỏ hơn mà chúng ta so sánh lớn hơn lượng dư thừa, dẫn đến tổng A lớn hơn  , do đó để giảm bớt lượng dư, tùy vào bài toán, chúng ta nên nhóm thành 6 ngoặc



==

Vậy 

**Bài 12:**Cho , Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhóm tổng S thành 3 ngoặc





Mặt khác: 

Vậy 

**Bài 13:**Cho , Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tách tổng A thành:

Ta có 

Ta có 

Vậy 

**Bài 14:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Thấy rằng tổng A có 2003 số hạng, số hạng ở giữa là 

TH1: 





TH2: =

Vậy 

**Bài 15:**Cho , Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Tổng A có 50 số hạng

Ta có:

 (1)

Mặt khác: (2)

Từ (1) và (2) ta có 

**Bài 16:**Cho , Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tổng A có 60 số hạng: 



Mặt khác: 

Vậy

**Bài 17:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhận thấy các mẫu của tổng A là bình phương cảu các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là 1

nên ta tách A như sau:



Mà 

Vậy 

**Bài 18:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Nhận thấy tổng A có phân số cuối có dạng , nên muốn Chứng minh tổng A lớn hơn 1 số ta nhóm sao cho phân số có dạng ở cuối ngoặc :

Ta có : 







Vậy 

**Bài 19:**Cho :, chứng minh rằng 

**Lời giải**

Nhận thấy tổng A giống với bài 10, muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng  ở cuối ngoặc :



Mặt khác muốn chứng minh A <100, ta nhóm sao cho phân số có dạng  nằm ở đầu ngoặc:





Vậy 

**Bài 20:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**





Vậy 

**Bài 21:**Cho  , So sánh A với 2007

**Lời giải**

Ta có:



Xét 



Khi đó:

Vậy 

**Bài 22:**Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên n để: 

**Lời giải**

Tương tự bài 18 ta **c**họn 

Khi đó : 

Vậy luôn tồn tại số tự nhiên n để: 

**Bài 23:**Cho , So sánh B với 50

**Lời giải**





Vậy

**Bài 24:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có , có  số hạng



Vậy

**Bài 25:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tổng này là 1 trường hợp của bài 24: Áp dụng cách làm bài 24 ta có:



Vậy

**Bài 26:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Tương tự tổng này có dạng của bài 24, nên ta có:



Vậy

**Bài 27:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có: 

Vậy

**Bài 28:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**





Vậy

**Bài 29:**Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên n để 

**Lời giải**

Chọn . Khi đó ta có





Vậy luôn tồn tại số tự nhiên n để 

**Bài 30:**Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

=



Vậy

**Dạng 3: TÍCH CỦA MỘT DÃY**

**Phương pháp:**

Với dạng tích ta sử dụng tính chất:  với m>0, và ngược lại

**Bài 1:**Cho  Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta thấy: Phân số  nên ta có:

Khi đó : 

Mặt khác :  nên ta có : 

Khi đó :

Vậy

**Bài 2:**Cho  Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Ta thấy A có dạng ,





**** Vậy

**Bài 3:**Cho  Chứng minh rằng 

**Lời giải**

A có dạng  khi đó ta có:

Khi đó:

Mặt khác:



Vậy

**Bài 4:**Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Ta có





Vậy

**Bài 5:**Chứng minh rằng:  Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Ta có : 

Vậy

**Bài 6:**Cho Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Ta có : 

Mặt khác : 

Vậy

**Bài 7:**Cho  So sánh A với 

**Lời giải**

Ta thấy tích A gồm 99 số âm :

,

Mà :

Vậy 

**Dạng 4: BẤT ĐẲNG THỨC CHỮ**

**Phương pháp:**

Với chương trình lớp 6-7 các dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức chữ, ta thường sử dụng tính chất:  hoặc ngược lại và đưa về cùng mẫu

**Bài 1:**Cho a, b, c > 0, Chứng minh rằng:  có giá trị không nguyên

**Lời giải**

Với a, b, c > 0, ta có:



Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có: 

Ta có:



Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có: 

Suy ra ,

Vậy M không nguyên

**Bài 2:**Cho x, y, z, t là số tự nhiên khác 0, Chứng minh rằng:

 có giá trị không nguyên

**Lời giải**

Với x, y, z, t là số tự nhiên khác 0, ta có:



Cộng theo vế ta được: 

Ta có

,

Cộng theo vế ta được: 

Suy ra ,

Vậy M không nguyên

**Bài 3:**Cho a, b, c là các số dương, và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại.

Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Chúng ta có thể làm theo cách ở trên, hoặc làm theo cách thứ hai như sau:

Giả sử: 

Khi đó ta có:

,

Cộng theo vế ta được: 

**Bài 4:**Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Với a, b, c, d > 0, ta có:



Cộng theo vế ta được: 

Ta có 

Cộng theo vế ta được: 

Vậy với a, b, c, d > 0, ta có: 

**Bài 5:**Cho a, b, c, d > 0, Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Với a, b, c, d > 0, ta có:









Cộng theo vế ta được: 

Vậy với a, b, c, d > 0, ta có: 

**Bài 6:**Cho các số x,y,z nguyên dương. Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Ngoài hai cánh như trên, ta cũng có thể hướng dẫn học sinh làm theo cánh như sau:

Ta có:, Tương tự ta cũng có: 

Mà  Nên 

**Bài 7:**Cho a,b,c là ba cạnh của 1 tam giác.Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có :



Tương tự ta có :

và

Cộng theo vế ta được : 

Vậy a,b,c là ba cạnh của 1 tam giác thì 

**Bài 8:**Cho ba số dương .Chứng minh rằng:

**Lời giải**

Vì 



Mà 

Chứng minh tương tự ta có:  và 

Cộng theo vế ta được: 

Vậy với ba số dương . Chứng minh rằng:

**Dạng 5: TÌM MIN - MAX CỦA BIỂU THỨC GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

**Bài 1:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a) b) c) C = 

**Lời giải**

a) Ta có:

Khi đó A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi 

b) Ta có:

Khi đó B đặt giá trị lớn nhất bằng 1,5 khi 

c) Ta có:  khi đó đạtgiá trị nhỏ nhất bằng 0 kho x = 3

**Bài 2:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của ::

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi x=3,5

b) Ta có: khi x=1,4

c) Ta có:  khi 

**Bài 3:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có:, khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 4:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có: khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 5:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a) A=  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có: khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 6:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b, c)

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có: khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 7:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi x=0

b) Ta có: khi x=0

c) Ta có:  khi 

**Bài 9:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a) A=  b) B=  c) C =

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có: . khi:

c) Ta có:  khi 

**Bài 10:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b,  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi x = 0

b) Ta có: khi: 

c) Ta có: khi 

**Bài 11:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b,  c) 

**Lời giải**

a) Xét:

Xét khi 

b) Xét 

Xét  khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 12:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có: khi 

b) Ta có: khi 

c) Ta có:  khi 

**Bài 13:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:khi 

b) Ta có: khi: 

**Bài 14:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b) 

**Lời giải**

1. Ta có:

Vậy khi: 

b) Ta có:khi 

**Bài 15:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:khi 

b) Ta có: khi 

**Bài 16:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:khi 

b) Ta có :  khi 

**Bài 17:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

**Lời giải**

Ta có:khi 

**Bài 18:**Tìm giá trị lớn nhất của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có :khi x = 0

b) Ta có : khi 

c) Ta có :khi 

**Bài 19:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) với x là số nguyên của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có : khi x = - 5

b) Ta có : 

Để D đạt min thì 

Vậy  khi 

Để D đạt max thì 

Vậy  khi 

**Bài 20:**Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) Ta có : ,

Mà 

Vậy khi 

b) 

Mà 

Suy ra khi 

c) 

Mà 

Vậy khi 

**Bài 21:**Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) 

Vậy :khi 

b) 

Vậy :khi 

c) 

mà 

Hay khi 

**Bài 22:**Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Mà 

Hay khi 

b) Ta có:

Mà 

Hay khi 

**Bài 23:**Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Hay khi 

b) Ta có:

Vậy khi 

**Bài 24:**Tìm GTLN của:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Vậykhi 

b) Ta có:

Vậykhi 

**Bài 25:**Tìm giá trị lớn nhất của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Vậy khi 

b) Ta có:

Vậy khi 

**Bài 26:**Tìm giá trị lớn nhất của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Vậykhi 

b) Ta có:

Vậykhi 

**Bài 27:**Tìm giá trị lớn nhất của :

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có:

Vậykhi 

b) Ta có:

Vậy khi 

**Bài 28:**Tìm giá trị lớn nhất của :

**Lời giải**

Ta có:

Vậykhi 

**Bài 29:**Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a)  b)  c) 

**Lời giải**

a) với  (1)

Với 

Mà  (2)

Từ (1) và (2) ta có khi 

b) Với  (1)

Với 

mà (2)

Từ (1) và (2) ta có : khi 

c) Với 

Mà  (1)

Với  (2)

Từ (1) và (2) ta có :khi 

**Bài 30:**Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a)  b)  c)

**Lời giải**

a) Với 

Mà  (1)

Với  (2)

Từ (1) và (2) ta có :khi 

b) Với 

Mà  (1)

Với  (2)

Từ (1) và (2) ta có :khi 

c) Với  (1)

Với 

Mà  (2)

Từ (1) và (2) ta có :khi 

**II- BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC**

**A. Kiến thức cần nhớ**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| * *Để chứng minh hai đoạn thẳng, hai góc không bằng nhau ta có thể:*   **1.** Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác (h22.1)  Hình 22.1   |  | | --- | |  |   Suy ra trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông) thì cạnh đối diện  với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.  **2.** Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau (h.22.2)  Hình 22.2   |  | | --- | | và  có:    Khi đó |   **3.** Dùng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, giữa đường xiên và hình chiếu.  Hình 22.3   |  | | --- | | (h.22.3). Khi đó:   * (dấu “=” xảy ra ) |   Hình 22.4  **4.** Dùng bất đẳng thức tam giác (h.22.4)   |  | | --- | |  |   *Mở rộng:* Với ba điểm  bất kì bao giờ cũng có  (dấu “=” xảy ra  thuộc đoạn thẳng).   * *Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng thay đổi*   Ta phải đi chứng minh  (số  không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu “=” xảy ra. Khi đó giá trị lớn nhất của độ dài  bằng . Ta viết .   * *Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng thay đổi*   Ta phải đi chứng minh  (số  không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu “=” xảy ra. Khi đó giá trị nhỏ nhất của độ dài  bằng . Ta viết . |

**B. Một số ví dụ:**

***Ví dụ 1.*** Tam giác  có . Vẽ đường trung tuyến . Trên tia đối của tia  lấy điểm . Chứng minh rằng .

***Giải*** *(h.22.5)*

*- Tìm cách giải:*

Để chứng minh ta có thể chứng minh  và . Sau đó cộng từng vế hai bất đẳng thức.

*- Trình bày lời giải:*



Hình 22.5

Tam giác  có  suy ra  (1).

Xét  và  có: ,  chung,  nên .

Suy ra 

Xét  và  có ,  chung, nên  (2).

Từ (1) và (2), suy ra .

* ***Nhận xét:*** Nếu  và  thì .

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có . Gọi  là trung điểm của  . Vẽ  thuộc đường thẳng ). Chứng minh rằng  .

***Giải*** *(h.22.6)*

*- Tìm cách giải:*



Hình 22.6

Ta có .

Để chứng minh ta biểu diễn  theo hai cách khác nhau rồi dùng tính chất cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều sẽ có được .

*- Trình bày lời giải:*

Ta có  (cạnh huyền – góc nhọn) .

Xét tam giác  có  nên  là cạnh lớn nhất, do đó . (\*)

Suy ra . (1)

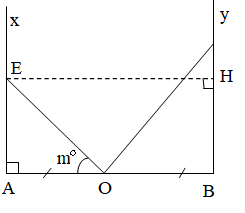
Từ (\*) ta được . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (vì )

Vậy .

***Ví dụ 3.*** Cho đoạn thẳng  và trung điểm  của nó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là  vẽ các tia cùng vuông góc với. Lấy điểm , điểm  sao cho . Đặt . Xác định giá trị của  để  có độ dài ngắn nhất.

**Giải** (.22.7)

*\*Tìm cách giải*

Vẽ EH  By. Dễ thấy AF ≥ IH = AB (không đổi)

Ta cần tìm giá trị của m để dấu “=” xảy ra.

Khi đó minEF = AB

*\*Trình bày lời giải*

Vẽ EH By. Theo tính chất đoạn chắn song song ta được EH = AB và AE = BH.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có AF ≥ IH do đó EF ≥ AB. Dấu “=” xảy ra F AE = BF   
= (vì ).

Vậy EF có độ dài ngắn nhất (bằng độ dài AB) khi và chỉ khi , tức là khi   
và chỉ khi m = 45.  
***Ví dụ 4.*** Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Xác định điểm M trên tia Ox, điểm N trên tia Oy sao cho OM = ON và Tổng AM + AN nhỏ nhất.

giải(h.22.8)

*\*Tìm cách giải*

|  |  |
| --- | --- |
| Xét 3 điểm A, M, N ta có AM + AN ≥ MN nhưng độ dài MN lại thay đổi. Do đó không thể kết luận Tổng AM + AN có giá trị nhỏ nhất bằng độ dài MN được. Ta phải thay thế Tổng AM + AN bằng tổng của hai đoạn thẳng có tổng lớn hơn hoặc bằng độ dài của một đoạn thẳng cố định. Muốn vậy ta cần vẽ thêm hình phụ để tạo thêm một điểm E cố định.  *\*Trình bày lời giải* | h1.PNG |

Trên nửa mặt phẳng bờ Oy không chứa A Vẽ tia Ot sao cho  
Trên tia Ot lấy điểm E sao cho OE = OA. Như vậy hai điểm A và E cố định đoạn thẳng AE có độ dài không đổi

Ta có (c.g.c) AM = EN . Do đó AM + AN = EN + AN  
 Gọi F là giao điểm của AE với tia Oy

Xét ba điểm N, A, E ta có: EN + AN ≥ AE (dấu “=” xảy ra tương đương N trùng F)  
 Vậy min AM + AN = AE khi N F. Điểm M Ox sao cho OM = ON.

**C. Bài tập vận dụng**

* *Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác*

**2.1**. Cho tam giác ABC, . Chứng minh rằng .

**2.2.** Cho tam giác ABC, AB < AC. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Gọi D là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng DE < DF.

**2.3.** Cho tam giác ABC, và AB = . Chứng minh rằng .

**2.4.** Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

Chứng minh rằng AM > khi và chỉ khi góc A nhọn.

**2.5.** Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Chứng minh rằng trong 4 điểm A, B, C, D tồn tại 3 điểm là ba đỉnh của một tam giác có một góc lớn hơn .

* *Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên*

**2.6.** Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng a. lấy điểm B a. Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt đường thẳng a tại C.

Xác định vị trí của điểm B để BC có độ dài nhỏ nhất.

**2.7**. Cho tam giác ABC cân tại A, BC = a. Gọi O là một điểm trên đáy BC. Qua O vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh bên, cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Tìm độ dài nhỏ nhất của MN.

**2.8.** Cho tam giác đều ABC cạnh dài 4cm. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = CE. Tính độ dài nhỏ nhất của DE.

**2.9.** Cho tam giác ABC, và AC = 52cm. Điểm M nằm giữa B và C. Tính giá trị lớn nhất của tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

**2.10.** Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng 2a thì tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α là tam giác có chu vi nhỏ nhất.

* *Bất đẳng thức tam giác*

**2.11.** Cho tam giác ABC. Gọi xy là đường phân giác gosc ngoài tại đỉnh C. Tìm trên xy một điểm M sao cho tổng MA + MB ngắn nhất.

**2.12.** Cho tam giác ABC có AM = 12, AC = 16. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S = 7MA + 3MB + 4MC.

**2.13.** Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng tổng HA + HB + HC nhỏ hơn chu vi của tam giác ABC.

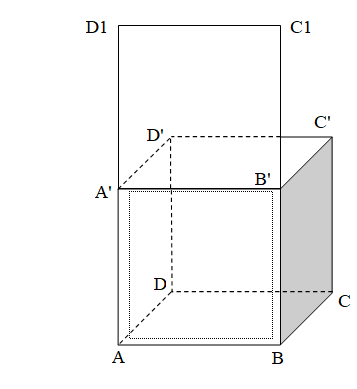
**2.14.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = a. Tìm một điểm M sao cho tam giác MAC cân tại M, đồng thời tổng MA + MB nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**2.15.** Cho đường thẳng xy và tam giác ABC có cạnh AB nằm trên một nửa mawjt phẳng bờ xy còn đỉnh C di động trên xy. Biết AB = 13cm, khoảng cách từ A và B đến xy lần lượt bằng 2cm và 7cm.

Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

**2.16.** Một hộp gỗ hình lập phương mỗi cạnh dài 20cm. Đáy ABCD đặt áp sát mặt bàn. Nắp hộp A’B’C’D’ có thể mở dựng đứng lên trên (h.22.9). Một con kiến ở đỉnh A muốn bò tới đỉnh C’ bằng cách vượt qua cạnh A’B’ thì phải bò một quảng đường ngắn nhất là bao nhiêu?



*Hình 22.9*

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**2.1**

\* Nếu thì tam giác ABC cân, nên tam giác ABC đều. Do đó AB = BC = CA

Suy ra . Vậy 

* Nếu thì  (vì )

Do đó 

* Nếu , cũng chứng minh tương tự ta được 

**2.2**

Theo định lý Pytago ta có mà AB < AC nên BE < CF,

Dễ thấy 

Xét và có : BC chung, CE = BF, BE < CF



Xét và có CE = BF, DC = DB và ( Định lý hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

**2.3**

Vẽ đường trung trực của BC cắt BC tại M, cắt AC tại N.

Ta có NB = NC; tam giác NBC cân 

Tam giác BAM có BA = BM  nên là tam giác cân

Suy ra mà ( Quan hệ giữa cạnh đối diện trong một tam giác)

 và  có BM = BA, BN chung, MN > AN

Do đó ( định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau)

Suy ra 

Do đó (vì 

**2.4**

Trên tia đối của tia AM lấy điểm D sao cho MD = MA



Do đó AB//CD

( cặp góc trong cùng phía) (\*)

* Chứng minh mệnh đề “ Nếu góc A nhọn thì ”

Nếu thì 2AM = BC do đó AD = BC.

, trái GT

Nếu thì 2AM < BC do đó AD < BC

 và có AB = CD; AC chung và BC > AD

Do đó 

Từ (\*) suy ra , trái GT

Vậy nếu góc A nhon thì 

* Chứng minh mệnh đề “ Nếuthì góc A nhọn”

Nếu thì từ (\*) suy ra 

, trái GT

Nếu thì từ (\*) suy ra . Vậy 

và có: AB = CD; AC chung và 

Do đó BC > AD hay BC > 2AM tức là , trái GT

Vậy nếu thì góc A nhọn.

**2.5**

Vẽ các đoạn thẳng DA, DB, DC. Ta có 

Suy ra tồn tại ít nhất một góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng 1200 ( vì nếu cả ba góc đều lớn hơn 1200 thì tổng của chúng lớn hơn 3600, vô lí)

Giả sử góc đó là góc BDC

Xét tam giác BDC có , suy ra 

Do đó tôn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng 300> 290

Vậy ba điểm cần tìm là B, C, D.

**2.6**

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên đường thẳng a. Khi đó AH có độ dài không đổi. Ta có tam giác ABC vuông tại A nên ( Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

Do đó BC có độ dài nhỏ nhất là 2AHvuông cân.

Ta xác định điểm B như sau:

* Dựng 
* Trên đường thẳng a đặt HB = HA

**2.7**

Vẽ  khi đó IN = HK và IH = NK (tính chất đoạn chắn song song)

Ta có OM//AC

Do đó cân tại M, từ đó ta được HB = HO

Tương tự ta có KC = KO. Suy ra 

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có 

Dấu “=” xảy ra  là trung điểm của BC.

Vậy min MN =  khi O là trung điểm của BC.

**2.8**

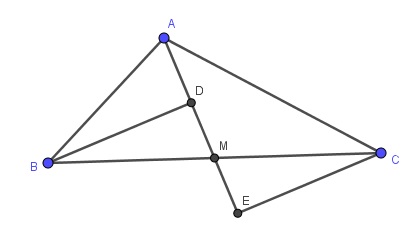
Vẽ , ta có DF = HK ( tính chất đoạn chắn song song)

Các tam giác vuông HBD và KCE có nên . Do đó 

Suy ra HK = 2cm.

Dấu “=” xảy ra là trung điểm của AB ( Khi đó E là trung điểm của AC)

Vậy độ dài nhỏ nhất của DE là 2cm khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC

**2.9**. (h.22.20)

Vẽ .

Ta có (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó  (Dấu  xảy ra  và  trùng với ).

* *Tính độ dài*  (h.22.21)

Vẽ ,  vuông tại có  nên 

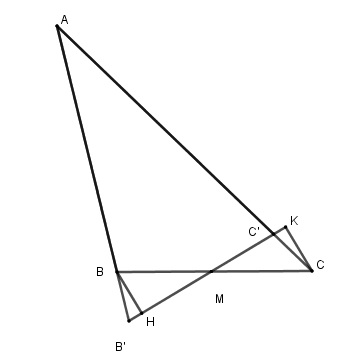
Ta có 

Xét  vuông tại , có  nên là tam giác vuông cân.

. Do đó .

Vậy giá trị lớn nhất của tổng  là 71 cm khi *M* là hình chiếu của *A* trên *BC.*

**2.10.** (h.22.22)



Xét có  và .

Ta phải chứng minh rằng khi  thì  chu vi sẽ nhỏ nhất.

Thật vậy, giả sử .

Trên tia lấy điểm , trên tia lấy điểm  sao cho .

Khi đó và  là các điểm cố định và có đội dài không đổi.

Ta có .

Do đó 

Vẽ  và .

 (cạnh huyền, góc nhọn)  do đó 

Gọi là giao điểm của  và .

Ta có  hay  (2)

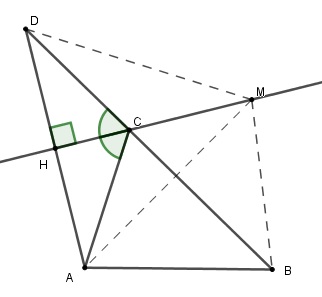
Từ (1) và (2) suy ra .

Ta có chu vi  (không đổi).

Dấu “=” xảy ra và .

Vậy chu vi nhỏ nhất khi , tức là khi cân tại *A.*

**2.11.**(h.22.23)

Vẽ , tia  cắt đường thẳng  tại . Khi đó  không đổi.

(g.c.g) là đường trung trực của .

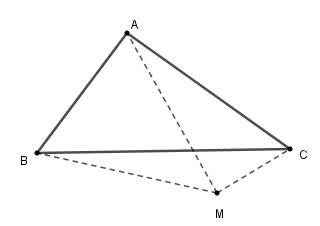
Gọi là một điểm bất kì trên .

Ta có (Tính chất điểm nằm trên đường trung trực).

 (dấu “=” xảy ra ).

Vậy tổng  ngắn nhất là bằng  khi và chỉ khi .

**2.12.** (h.22.24)

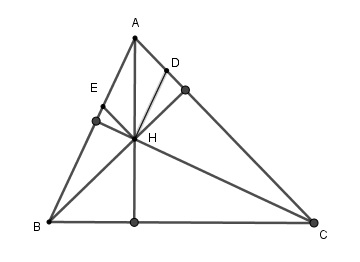


Ta có: 



Dấu  xảy ra  thuộc đoạn thẳng  và .

Vậy  khi .

**2.13.** (h.22.25)

Từ  vẽ đường thẳng song song với  cắt tại ; đường thẳng song song với  cắt  tại . Theo tính chất đoạn thẳng song song ta có .

Vì  nên (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Chứng minh tương tự ta được .

Xét  có (bất đẳng thức tam giác). Suy ra:



. (1)

Chứng minh tương tự, ta được:

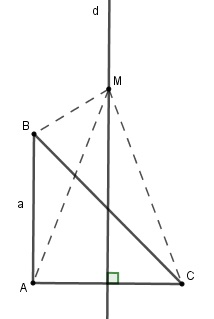
 (2)

 (3)

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được: 

Do đó: 

**2.14.** (h.22.26)

Tam giác *ABC* vuông cân tại *A* nên theo định lý Py – ta – go ta tính được  .

Tam giác *MAC* cân tại *M*, do đó *M* nằm trên đường trung trực *d* của *AC.*

Xét tổng .

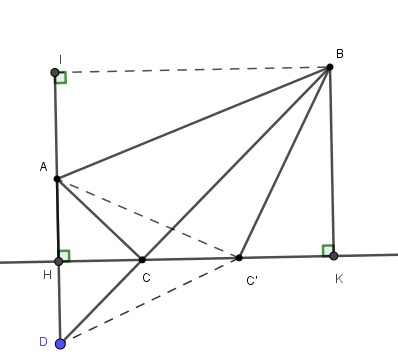
Dấu “ = ” xảy ra khi  với *O* là giao điểm của *d* với cạnh *BC*.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng  là  khi .

* *Nhận xét*: Ta thấy  nhưng không có vị trí nào của để dấu “ = ” xảy ra.

Vì thế không thể kết luận .

**2.15.** (h.22.27)



* *Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất*

Chu vi của là .

Do *AB* cố định nên chu vi  nhỏ nhất  nhỏ nhất.

Vẽ . Trên tia đối của tia *HA* lấy điểm *D* sao cho .

Khi đó *BD* là một đoạn thẳng cố định. Gọi *C’* là một điểm trên *xy*.

(c.g.c).

Xét ba điểm *BDC’* ta có (Dấu “=” xảy ra  với *C* là giao điểm của *BD* với *xy*)

Do đó  nhỏ nhất là bằng *BD* khi .

Suy ra khi C là giao điểm của BD với xy thì chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

* *Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC*

Vẽ  ta tính được HI = 7cm; IA =5cm và ID = 9cm

Áp dụng định lý Py-ta-go vào  vuông tại I ta có:

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông  ta được:



Vậy giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC là:

CA + CB + AB = BD + AB = 15 + 13 =28 (cm)

**2.16** (h22.28)

Gọi M là điểm trên cạnh A’B’ mà con kiến phải qua khi bò từ A đến C.

Mở nắp hộp A’B’C’D’ đứng lên đến vị trí A’B’C1D1

Xét ba điểm A, M, C1 ta có MA + MC1≥AC1

Dấu “=” xảy ra

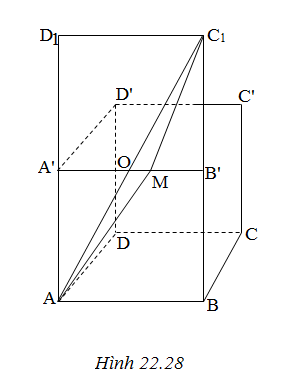
⇔M trùng với giao điểm O của AC1 với cạnh A’B’

⇔

⇔M là trung điểm của A’B’

Ta có: 

Vậy quãng đường ngắn nhất mà kiến phải bò là 44,7 cm khi kiến bò qua trung điểm M của cạnh A’B’ theo hành trình đoạn thẳng AM rồi đoạn thằng MC’



**= = = = = = = = = = HẾT = = = = = = = = = =**