

Ngày soạn: 30/10/2024

## CHỦ ĐỀ : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Thời gian thực hiện: 3 tiết

### I. MỤC TIÊU:

#### 1. Về kiến thức:

- Học sinh vận dụng được các kiến thức về vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn, hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn.

#### 2. Về kỹ năng:

- Rèn luyện năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.

- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

- Học sinh biết vận dụng tính sáng tạo để giải quyết tình huống của từng bài toán cụ thể nhằm phát triển năng lực sáng tạo.

### II. TIẾN TRÌNH DẠY HỌC:

#### 1. Hoạt động 1: Ôn tập kiến thức đã học

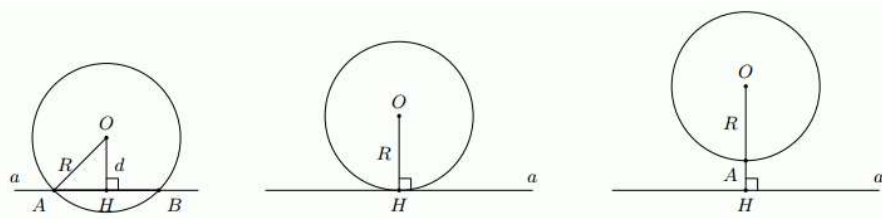
##### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

+ Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  gọi là cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung

+ Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  gọi là tiếp xúc nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung  $H$ . Điểm chung ấy gọi là tiếp điểm.

Khi đó, đường thẳng  $a$  còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $H$ .

+ Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$  gọi là không giao nhau nếu chúng không có điểm chung,



\* **Nhận xét:** Đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; R)$  cắt nhau khi  $d < R$ , tiếp xúc với nhau khi  $d = R$  và không giao nhau khi  $d > R$

##### 2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

\* Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

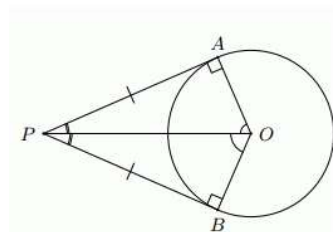
##### 3. Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn

\* Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại điểm  $P$  thì:

+ Điểm  $P$  cách đều hai tiếp điểm

+  $PO$  là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến

+  $OP$  là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.



#### 2. Hoạt động 2: Luyện tập

##### Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

**Bài 1:** Cho đường thẳng  $a$  và điểm  $O$  cách  $a$  một khoảng bằng 4cm. Không vẽ hình, hãy xét vị trí tương đối của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O)$ .

a)  $(O; 3\text{cm})$

b)  $(O; 5\text{cm})$

c)  $(O; 4\text{cm})$

##### Lời giải

a) Vì  $d > R (4 > 3)$  nên đường tròn  $(O; 3\text{cm})$  không cắt đường thẳng  $a$

- b) Vì  $d < R$  ( $4 < 5$ ) nên đường tròn  $(O; 5\text{cm})$  cắt đường thẳng  $a$   
 c) Vì  $d = R$  ( $4 = 4$ ) nên đường tròn  $(O; 4\text{cm})$  tiếp xúc đường thẳng  $a$

**Bài 2:** Cho đường thẳng  $b$  và một điểm  $I$  cách  $b$  một khoảng  $d = 6\text{cm}$ . Xác định vị trí tương đối của  $b$  với các đường tròn sau:

- a) Đường tròn  $(I; 3\text{cm})$   
 b) Đường tròn  $(I; 6\text{cm})$   
 c) Đường tròn  $(I; 8\text{cm})$

#### Lời giải

- a) Ta có  $d = 6\text{cm}$ ,  $R = 3\text{cm}$ . Vì  $d > R$  nên  $b$  và đường tròn  $(I; 3\text{cm})$  không giao nhau  
 b) Ta có  $d = 6\text{cm}$ ,  $R = 6\text{cm}$ . Vì  $d = R$  nên  $b$  và đường tròn  $(I; 6\text{cm})$  tiếp xúc nhau  
 c) Ta có  $d = 6\text{cm}$ ,  $R = 8\text{cm}$ . Vì  $d < R$  nên  $b$  và đường tròn  $(I; 8\text{cm})$  cắt nhau tại hai điểm.

### Dạng 2: Nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

#### Phương pháp giải

a) Nếu một đường thẳng đi qua 1 điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

|           |                                                            |
|-----------|------------------------------------------------------------|
| Giả thiết | Đường thẳng $a$ , điểm $C$ thuộc $(O)$<br>$a \perp OC = C$ |
| Kết luận  | $a$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$                  |

b) Nếu khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn

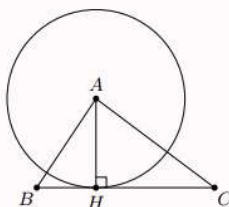
|           |                                                                                          |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Giả thiết | Đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng $a$<br>$d$ bằng khoảng cách từ $O$ đến $a$ và $d = R$ |
| Kết luận  | $a$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$                                                |

c) Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn

#### Bài tập

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $AH$ . Tìm tiếp tuyến của đường tròn  $(A; AH)$  tại  $H$ .

#### Lời giải

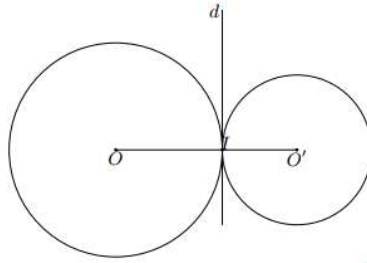


Xét  $(A)$  ta có  $AH \perp BC$  tại  $H$  ( $AH$  là đường cao của  $\triangle ABC$ );  $H \in (A)$

Suy ra  $BC$  là tiếp tuyến của  $(A)$  tại  $H$ .

**Bài 2:** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài nhau tại điểm  $I$ . Gọi  $d$  là tiếp tuyến của  $(O; R)$  tại điểm  $I$ . Chứng minh  $d$  là tiếp tuyến của  $(O'; R')$ .

#### Lời giải



Vì  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại  $I$  nên  $O, I, O'$  thẳng hàng.

$d$  là tiếp tuyến của  $(O; R)$  tại điểm  $I$  nên  $OI \perp d$

Hay  $\widehat{OId} = 90^\circ$

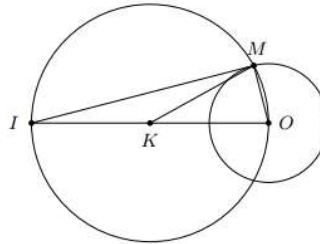
Mà  $\widehat{OId} + \widehat{O'Id} = 180^\circ$

Do đó  $\widehat{O'Id} = 180^\circ - \widehat{OId} = 90^\circ$

Hay  $d \perp O'I$ . Vậy  $d$  là tiếp tuyến của  $(O')$ .

**Bài 3:** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $I$  ở ngoài đường tròn. Gọi  $M$  là giao điểm của đường tròn tâm  $K$  đường kính  $IO$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh đường thẳng  $IM$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$ .

**Lời giải**



Vì  $IO, KM$  lần lượt là đường kính, bán kính của đường tròn  $(K)$  nên  $KM = \frac{1}{2}IO$

Xét  $\triangle IMO$ , ta có đường trung tuyến  $MK$  ứng với cạnh  $IO$  bằng nửa cạnh ấy.

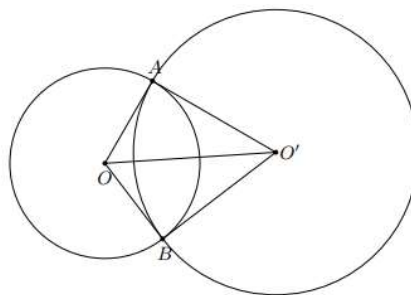
Suy ra tam giác  $IMO$  vuông tại  $M$

Do đó  $IM \perp MO$  tại  $M$  với  $M \in (O)$

Vậy đường thẳng  $IM$  là một tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$ .

**Bài 4:** Cho hai đường tròn  $(O)$ ,  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  sao cho đường thẳng  $OA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$ . Chứng minh đường thẳng  $O'B$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Lời giải**



$OA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O') \Rightarrow OA \perp O'A$

Suy ra  $\widehat{OAO'} = 90^\circ$

Xét  $\triangle OAO'$  và  $\triangle OBO'$  có:

$OA = OB$  (bán kính  $(O)$ );  $OO'$  cạnh chung;  $O'A = O'B$  (bán kính  $(O')$ )

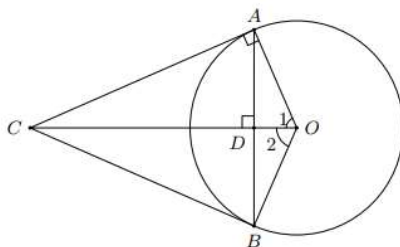
Do đó  $\triangle OAO' = \triangle OBO'$  suy ra  $\widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$

Mà  $\widehat{OAO'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OBO'} = 90^\circ$  hay  $OB \perp O'B$

Vậy  $O'B$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 5:** Cho  $AB$  là một dây không đi qua tâm của đường tròn  $(O)$ . Đường thẳng qua  $O$  và vuông góc với  $AB$  cắt tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$  ở điểm  $C$ . Chứng minh rằng  $CB$  là một tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Lời giải**



Gọi  $D$  là giao điểm của  $AB$  và  $OC$

Trong tam giác cân  $AOB$  ( $OA = OB$ ), đường cao  $OD$  (do  $OC \perp AB$ ) cũng là đường phân giác của góc  $O$ , suy ra  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Ta có:  $\triangle AOC = \triangle BOC$  (c-g-c), vì  $OC$  là cạnh chung,  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$  và  $OA = OB$

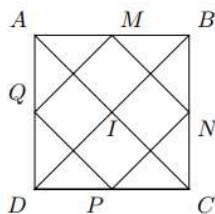
Từ đó  $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$  (do  $OA$  là tiếp tuyến)

Vậy  $CB$  vuông góc với bán kính  $OB$  tại  $B$ .

Do đó ta có  $CB$  cũng là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 6:** Cho một hình vuông có độ dài mỗi cạnh bằng 6cm và hai đường thẳng chéo cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh rằng đường tròn  $(I; 3\text{cm})$  tiếp xúc với cả bốn cạnh của hình vuông

**Lời giải**



Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$

Xét  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $I$  là trung điểm của  $AC$

Suy ra  $MI$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$

Do đó  $MI = 3$  và  $MI \perp AB$  tại  $M$  nên  $AB$  tiếp xúc với  $(I; 3\text{cm})$  tại  $M$ .

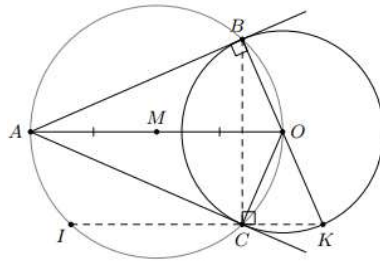
Chứng minh tương tự với  $N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD, DA$ .

**Bài 7:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$ . Vẽ hai đường tròn đường kính  $OA$ , đường tròn này cắt  $(O)$  tại hai điểm phân biệt  $B$  và  $C$ . Kẻ  $BI$  là đường kính của đường tròn đường kính  $OA$ , kẻ  $BK$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng:

a)  $AB, AC$  là hai tiếp tuyến của  $(O)$

b)  $IK$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(B; BC)$

**Lời giải**



- a)  $B$  thuộc đường tròn đường kính  $OA$  nên  $\widehat{ABO} = 90^\circ$   
 mà  $B$  thuộc  $(O)$  nên  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$   
 Tương tự, ta có  $AC$  là tiếp tuyến của  $(O)$
- b)  $C$  thuộc đường tròn đường kính  $BI$  nên  $\widehat{BCI} = 90^\circ$ .  
 $C$  thuộc đường tròn đường kính  $BK$  nên  $\widehat{BCK} = 90^\circ$   
 Từ đó suy ra ba điểm  $I, K, C$  thẳng hàng và  $IK \perp BC$  tại  $C$ .  
 Mà  $C$  thuộc đường tròn  $(B; BC)$  nên  $IK$  là tiếp tuyến của  $(B; BC)$ .

### Dạng 3: Bài toán liên quan đến tính độ dài

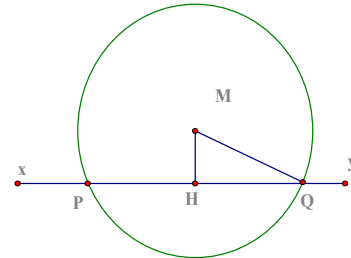
#### Phương pháp giải:

Ta nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp điểm và sử dụng định lý pytago.

#### Bài tập

**Bài 1:** Cho điểm  $M$  cách đường thẳng  $xy$  6cm, vẽ đường tròn  $(M; 10cm)$

- a. Chứng minh rằng đường tròn tâm  $M$  và đường thẳng  $xy$  cắt nhau  
 b. Gọi hai giao điểm là  $P$  và  $Q$ . Tính  $PQ$



Lời giải

- a. Kẻ  $MH \perp xy = H \Rightarrow MH$  là khoảng cách từ  $M$  đến  $xy$

$$\Rightarrow \begin{cases} MH = 6cm \\ R = 10cm \end{cases} \Rightarrow MH < R \Rightarrow xy \text{ cắt } (O; 10cm) \text{ tại } P \text{ và } Q$$

- b. Ta có  $MH \perp PQ \Rightarrow HP = HQ = \frac{1}{2}PQ$  (Quan hệ vuông góc đường kính và dây)  $\Rightarrow PQ = 2.HQ$

$$\text{Xét } \triangle MHQ (\widehat{H} = 90^\circ) \Rightarrow HQ = 8cm (HQ > 0) \Rightarrow PQ = 16(cm)$$

**Bài 2:** Cho hình vuông  $ABCD$ , trên đường chéo  $BD$  lấy điểm  $I$  sao cho  $BI = BA$ . Đường thẳng kẻ qua  $I$  vuông góc với  $BD$  cắt  $AD$  ở  $E$ .

- a. So sánh:  $AE, EI, ID$   
 b. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $BD$  với đường tròn  $(E; EA)$

Lời giải

- a. Ta có :  $\triangle AEB = \triangle IEB$  (ch-cgv)

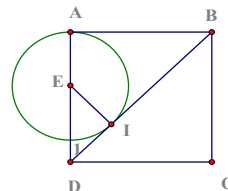
$$\Rightarrow AE = EI(1)$$

$$\triangle EID (\widehat{I} = 90^\circ), \widehat{D}_1 = 45^\circ \Rightarrow \text{vuông cân}$$

$$\Rightarrow IE = ID (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow AE = EI = ID$$

- b. Ta lại có  $EI = EA \Rightarrow I \in (E; EA) \Rightarrow R = EI$



mặt khác:  $EI \perp BD \Rightarrow d = EI \Rightarrow d = R \Rightarrow$  đường thẳng  $BD$  tiếp xúc với  $(E; EA)$

#### Dạng 4: Bài toán vận dụng tính chất tiếp tuyến

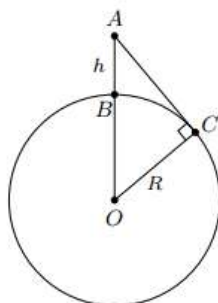
##### Phương pháp giải

Vận dụng tính chất của tiếp tuyến. Nếu đường thẳng  $\Delta$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  thì  $\Delta \perp OA$  tại  $A$ .

##### Bài toán

**Bài 1:** Một thủy thủ đang ở trên cột buồm của một con tàu, cách mặt nước biển 10m. Biết bán kính Trái Đất là khoảng 6400km. Tính tầm nhìn xa tối đa của thủy thủ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

##### Lời giải



Trên hình bên, ta có điểm  $B$  biểu diễn vị trí của con tàu, điểm  $A$  biểu diễn vị trí của thủy thủ, điểm  $C$  biểu diễn điểm xa nhất mà thủy thủ nhìn thấy. Khi đó độ dài đoạn thẳng  $AC$  gọi là tầm nhìn xa tối đa từ  $A$ .

Đặt  $h = AB, R = OB = OC$ . Ta tính  $AC$  theo  $R$  và  $h$ .

Do  $AC$  là tiếp tuyến với  $(O; R)$  tại  $C$  nên suy ra  $AC \perp OC$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác  $ACO$  vuông tại  $C$  ta có:

$$AC^2 = AO^2 - OC^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$$

$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{2Rh + h^2} = \sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0,01 + 0,01^2} \approx 11,314(\text{km})$$

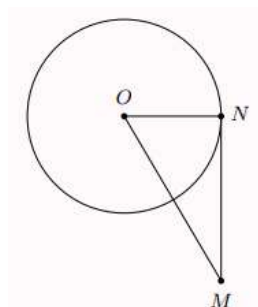
Vậy tầm nhìn xa tối đa của thủy thủ là khoảng 11,314(km)

**Bài 2:** Cho điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O; 3\text{cm})$  thỏa mãn  $OM = 5\text{cm}$ . Đường thẳng  $MN$  đi qua  $M$  và tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $N$ .

a) Tam giác  $OMN$  có phải là tam giác vuông hay không? Vì sao?

b) Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

##### Lời giải



a) Vì đường thẳng  $MN$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $N$  nên  $ON \perp MN$

Suy ra tam giác  $OMN$  vuông tại  $N$

b) Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác  $OMN$  vuông tại  $N$ , ta có:

$$OM^2 = ON^2 + MN^2$$

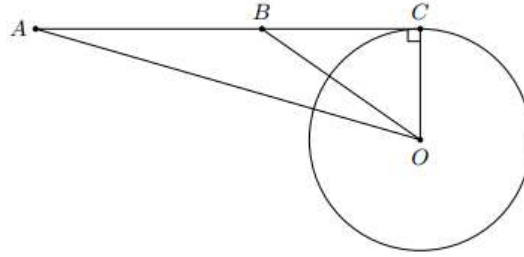
$$\text{Suy ra } 5^2 = 3^2 + MN^2$$

$$\text{Do đó } MN^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Vậy  $MN = 4(\text{cm})$ .

**Bài 3:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, trong đó  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường thẳng  $AB$  tại điểm  $C$ . Chứng minh:  $AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2$

**Lời giải**



Vì  $AB$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  nên  $AC \perp OC$

Khi đó áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle AOC$  vuông tại  $C$  ta được:

$$AO^2 = AC^2 + CO^2$$

Suy ra  $CO^2 = AO^2 - AC^2$  (1)

Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle BOC$  vuông tại  $C$  ta được:

$$BO^2 = BC^2 + CO^2 \Rightarrow CO^2 = BO^2 - BC^2 \quad (2)$$

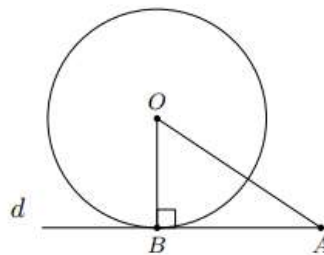
Từ (1) và (2) suy ra  $AO^2 - AC^2 = BO^2 - BC^2$

Vậy  $AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2$

**Bài 4:** Từ điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng  $d$  ( $d > R$ ) vẽ tiếp tuyến với đường tròn  $(O; R)$  ( $B$  là tiếp điểm).

Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$  theo  $d$  và  $R$ .

**Lời giải**



Vì  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $B$  nên  $AB \perp OB$  tại  $B$

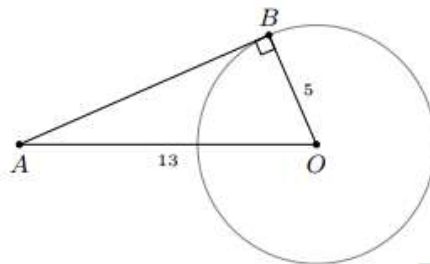
Áp dụng định lý Pythagore và  $\triangle AOB$  có:

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$$

Vậy  $AB = \sqrt{d^2 - R^2}$ .

**Bài 5:** Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R = 5\text{cm}$  và một điểm  $A$  cách  $O$  bằng  $13\text{cm}$ . Kẻ tiếp tuyến  $AB$  với đường tròn  $(O)$  ( $B$  là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn  $AB$ .

**Lời giải**



Ta có  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $AB \perp OB$

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông  $ABO$ , ta có:

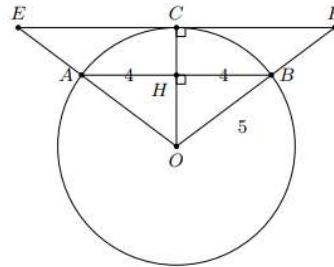
$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 13^2 - 5^2 = 114$$

$$\Rightarrow AB = 12$$

$$\text{Vậy } AB = 12\text{cm}$$

**Bài 6:** Cho đường tròn  $(O; 5\text{cm})$  và dây  $AB = 8\text{cm}$ . Một tiếp tuyến của  $(O)$  song song với  $AB$  cắt tia  $OA$  tại  $E$ , cắt tia  $OB$  tại  $F$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $EF$ .

**Lời giải**



Gọi  $C$  là tiếp điểm của tiếp tuyến  $EF$  với  $(O)$ ,  $H$  là giao điểm của  $OC$  với  $AB$

Ta có  $OC \perp EF$  tại  $C$ , mà  $AB \perp EF$  nên  $OC \perp AB$  tại  $H$

$$\Rightarrow HA = HB = \frac{1}{2}AB = 4\text{cm}$$

Áp dụng định lý Pythagore vào  $\Delta OHA$ , ta có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$$

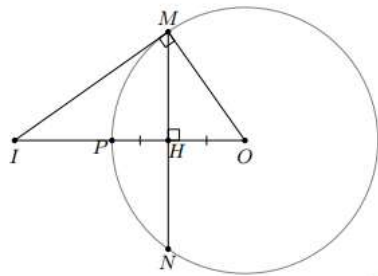
Ta có  $AB \parallel EF$  nên theo định lý Thales ta có:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{OB}{OF} = \frac{OH}{OC} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{5}{3} \cdot AB = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}\text{cm}.$$

**Bài 7:** Cho đường tròn  $(O)$ , bán kính  $R = 3$ , dây  $MN$  vuông góc với bán kính  $OP$  tại trung điểm của  $OP$ . Tiếp tuyến tại  $M$  của  $(O)$  cắt tia  $OP$  tại  $I$ . Tính độ dài  $MI$ .

**Lời giải**



Gọi  $H$  là giao điểm của  $MN$  và  $OP$

$$\text{Ta có: } MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó, } \sin \widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OMH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MIO} = 30^\circ$$

$$\text{Từ đó suy ra } MI = 2MH = 3\sqrt{3}.$$

### Dạng 5: Chứng minh một số tính chất và hệ thức hình học

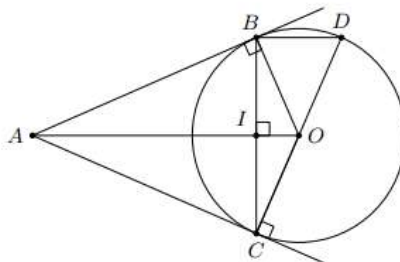
#### Phương pháp giải

- + Chứng minh hai đường thẳng vuông góc nhờ tính chất của tiếp tuyến
- + Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau nhờ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau
- + Áp dụng định lý Pythagore, hệ thức lượng trong tam giác vuông để chứng minh đẳng thức về đoạn thẳng, diện tích,....

## Bài toán

**Bài 1:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$ . Từ  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$ .  
Vẽ đường kính  $CD$ . Chứng minh rằng:  
a)  $OA \perp BC$   
b)  $BD \parallel OA$

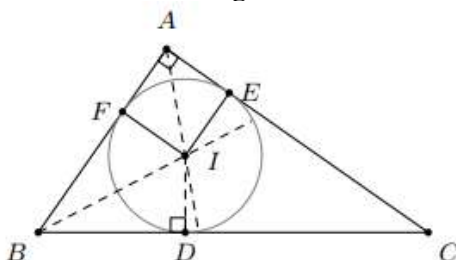
### Lời giải



- a) Ta có  $AB, AC$  là tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $AB = AC$  (1)  
 $B, C$  thuộc  $(O)$  nên  $OB = OC = R$  (2)  
Từ (1) và (2) suy ra  $A$  và  $O$  cách đều hai đầu đoạn thẳng  $BC$  nên  $AO$  là đường trung trực của đoạn  $BC$   
Suy ra  $OA \perp BC$   
b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ , vì  $OA$  là trung trực của  $BC$  nên  $I$  là trung điểm của  $BC$ .  
Do đó  $OI$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$   
Suy ra  $BD \parallel OI$  hay  $OA \parallel BD$  (có thể chứng minh bằng cách chỉ ra  $BD, OA$  cùng vuông góc với  $BC$ ).

**Bài 2:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc cạnh  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $S_{ABC} = BD \cdot DC$

### Lời giải



- a) Đặt  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  ( $I$  là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác  $ABC$ )  
Gọi  $E, F$  là các điểm tiếp xúc của  $(I)$  với  $AC, AB$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$BD = BF, CD = CE, AE = AF$$

+ Mặt khác, ta lại có:

$$BD + BF = AB + BC - (AF + CD)$$

$$2BD = BA + BC - (AE + CE)$$

$$2BD = c + a - b$$

$$BD = \frac{a + c - b}{2} = \frac{a - (b - c)}{2}$$

+ Tương tự ta có:  $DC = \frac{a + (b - c)}{2}$

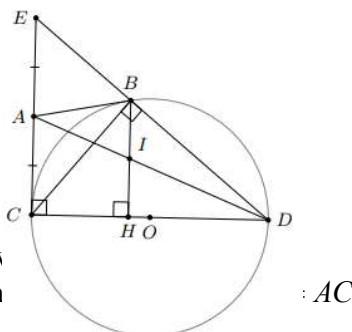
$$\text{Do đó } BD \cdot DC = \frac{a - (b - c)}{2} \cdot \frac{a + (b - c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+(b-c)}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4} = \frac{[a^2-(b^2+c^2)]+2bc}{4}$$

$$= \frac{2bc}{4} = \frac{bc}{2} \text{ (vì } a^2 = b^2 + c^2) = S_{\Delta ABC}.$$

**Bài 3:** Từ một điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là chân đường vuông góc vẽ từ  $B$  xuống đường kính  $CD$  của  $(O)$ . Chứng minh rằng  $IB = IH$  với  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BH$ .

**Lời giải**



Gọi  $E$  là giao điểm của  $CA$  và  $AB$ .  
Vì  $AB, AC$  là các tiếp tuyến

Suy ra tam giác  $ABC$  cân tại  $A \rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

Vì  $B$  thuộc đường tròn đường kính  $CD$  nên  $\widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CBE} = 90^\circ$

Do đó  $\widehat{AEB} + \widehat{BCA} = \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = 90^\circ$

Mà  $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$  nên  $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$

Suy ra tam giác  $ABE$  cân tại  $A$

$\Rightarrow AE = AB \Rightarrow AB = AC = AE$

Vì  $AC$  là tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $AC \perp CD \Rightarrow AC \parallel BH$  (cùng vuông góc với  $CD$ )

Xét tam giác  $ACD$  có  $IH \parallel AC \Rightarrow \frac{IH}{AC} = \frac{DI}{DA}$  (1)

Xét tam giác  $ABE$  có  $IB \parallel AE \Rightarrow \frac{IB}{AE} = \frac{DI}{DA}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{IB}{AE} = \frac{IH}{AC} \Rightarrow IH = IB$  (vì  $AC = AE$ )

#### Dạng 6: Một số bài toán liên quan đến cực trị hình học

##### Phương pháp giải

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân (bất đẳng thức Côsi): Với mọi  $a, b$  không âm, ta

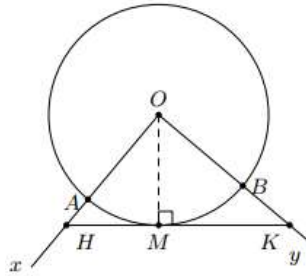
có  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  (dấu “=” xảy ra khi  $a = b$ ).

Hoặc  $a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  (dấu “=” xảy ra khi  $a = b$ ).

##### Bài toán

**Bài 1:** Cho đường tròn  $(O; R)$  và góc vuông  $Oxy$ . Tia  $Ox$  cắt  $(O)$  tại  $A$ , tia  $Oy$  cắt  $(O)$  tại  $B$ . Lấy điểm  $M$  trên cung nhỏ  $AB$ , vẽ tiếp tuyến tại  $M$  với  $(O)$ . Tiếp tuyến này cắt  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $H$  và  $K$ . Xác định vị trí của  $M$  để độ dài đoạn  $HK$  nhỏ nhất.

**Lời giải**



Ta có  $HK$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$  nên  $HK \perp OM$  tại  $M$ .

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông  $HOK$ , ta có:

$$HM \cdot MK = R^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

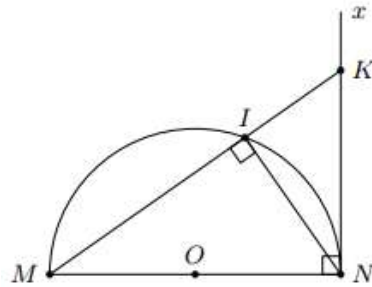
$$HK = HM + MK \geq \sqrt{HM \cdot MK} = 2\sqrt{R^2} = 2R$$

Dấu “=” xảy ra khi  $HM = MK \Leftrightarrow OM$  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác  $OHK \Leftrightarrow OM$  là đường phân giác của góc  $xOy$

Vậy nếu  $M$  trên cung nhỏ  $AB$  sao cho  $OM$  là đường phân giác của  $\widehat{AOB}$  thì  $HK$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $2R$ .

**Bài 2:** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$ , đường kính  $MN$ . Vẽ tiếp tuyến  $Nx$  tại  $N$  của  $(O)$ . Gọi  $K$  là một điểm tùy ý trên tia  $Nx$ , nối  $MK$  cắt  $(O)$  tại  $I$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $(2MI + MK)$ .

**Lời giải**



Vì  $Nx$  là tia tiếp tuyến của  $(O)$  nên  $Nx \perp MN$  tại  $N \Rightarrow \widehat{MNK} = 90^\circ$

Vì  $I$  thuộc đường tròn đường kính  $MN$  nên  $\widehat{MIN} = 90^\circ$  hay  $NI \perp MK$  tại  $I$

Áp dụng hệ thức vào tam giác vuông  $MNK$ , ta có:

$$MI \cdot MK = MN^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có:  $2MI + MK \geq 2\sqrt{MI \cdot MK} = 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4\sqrt{2}R$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow 2MI = MK \Leftrightarrow MI = IK \Leftrightarrow NK = 2R$

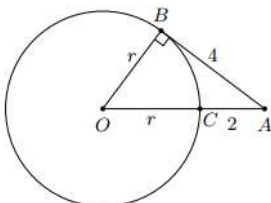
Vậy giá trị nhỏ nhất của  $(2MI + MK)$  bằng  $4\sqrt{2}R$  khi  $NK = 2R$ .

### 3. Hoạt động 3: Hướng dẫn học sinh tự học ở nhà

+ Nắm vững cách làm các dạng bài tập trên

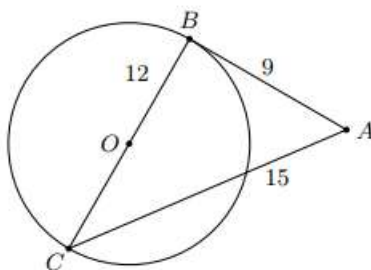
+ Làm các bài tập sau:

**Bài 1:** Trong hình vẽ bên,  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$ .



a) Tính bán kính  $r$  của đường tròn  $(O)$     b) Tính chiều dài cạnh  $OA$  của tam giác  $ABO$

**Bài 2:** Trong hình bên,  $AB=9$ ,  $BC=12$ ,  $AC=15$  và  $BC$  là đường kính của đường tròn. Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .



**Bài 3:** Cho đường tròn  $(O)$  đi qua ba đỉnh  $A$ ,  $B$  và  $C$  của một tam giác cân tại  $A$ . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$  là một tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 4:** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $AB$ . Điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  thỏa mãn điểm  $B$  nằm trong góc  $MAO$  và  $\widehat{MAB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ . Chứng minh đường thẳng  $MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 5:** Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ . Từ một điểm  $M$  trên đường tròn ta vẽ tiếp tuyến  $xy$  với nửa đường tròn. Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  của  $B$  trên  $xy$ . Chứng minh rằng:

- $M$  là trung điểm của  $HK$
- Đường tròn đường kính  $HK$  tiếp xúc với  $AB$ .

**Bài 6:** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho  $MA$  và  $MB$  là hai tiếp tuyến ( $A, B$  là hai tiếp điểm) thỏa mãn  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Biết chu vi tam giác  $MAB$  là 18cm, tính độ dài dây  $AB$ .

**Bài 7:** Ở hình vẽ bên. Biết  $MB$ ,  $MC$  lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và  $C$ ;  $\widehat{COB} = 130^\circ$ . Tính số đo  $\widehat{CMB}$ .