|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN**TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG** | **CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM****Độc lập - Tự do - Hạnh phúc***Phổ Yên, ngày 11 tháng 03 năm 2025* |

**BÁO CÁO**

**Biện pháp nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn**

- Tên biện pháp**: “ Một số kinh nghiệm ôn thi học sinh giỏi tìm giới hạn dãy số’’**

- Tên tác giả: Nguyễn Thị Vân Anh

- Đơn vị công tác: Trường THPT Lê Hồng Phong

- Lớp thực nghiệm : Đội tuyển HSG lớp 11, 12 năm 2023- 2024, 2024- 2025

- Lớp đối chứng: Đội tuyển HSG lớp 11, 12 năm học 2020- 2021, 2021- 2022

- Thời gian áp dụng biện pháp: Từ học kì II năm học 2023-2024, học kì I năm học 2024-2025.

 **I. LÝ DO CHỌN BIỆN PHÁP**

 **1. Cơ sở lí luận:**

 Dãy số và giới hạn của dãy số là phần mở đầu của bộ môn giải tích, do vậy nó đóng vai trò quan trọng đối với môn học và đối với người học. Bài toán tính giới hạn của dãy số thường xuyên xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Song khái niệm dãy số học sinh mới được làm quen trong chương trình toán lớp 11 phần mở đầu của giải tích toán học. Các dạng toán liên quan đến nội dung này thường là khó đối với học sinh THPT không chuyên, các em học sinh không định hướng hoặc chưa nắm được cách thức để giải các bài toán về tính giới hạn của một dãy số, đặc biệt là các bài toán trong các kì thi học sinh giỏi.

 **2. Cơ sở thực tiễn:**

 Qua thực tế giảng dạy chương trình môn toán lớp 11 những năm qua, cũng như việc ôn luyện trực tiếp cho đội tuyển học sinh giỏi môn toán lớp 11, 12 tôi nhận thấy rằng phần lớn các em học sinh chỉ làm được các bài toán đơn giản về giới hạn của dãy số, còn đối với các bài toán dãy số nằm trong đề thi học sinh giỏi các cấp thì các em học sinh hầu như không làm được hoặc làm chưa hoàn chỉnh câu này.

 Xuất phát từ các lý do trên tôi chọn biện pháp **: “ Một số kinh nghiệm ôn thi học sinh giỏi tìm giới hạn dãy số’’.** Qua nội dung các bài toán trong đề tài này nhằm giúp các em học sinh giỏi lớp 11, 12 không chuyên có thêm kiến thức, kĩ năng giải một số bài toán về tính giới hạn của dãy số nhằm đáp ứng cho việc học và ôn thi học sinh giỏi môn toán lớp 11, 12.

 **II. NỘI DUNG**

 **A. Một số kiến thức cần nhớ:**

 **1. Định nghĩa dãy số:**

 Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương  được gọi là một dãy số vô hạn ( hay gọi tắt là dãy số )

 Người ta thường kí hiệu dãy số u = u(n) bởi 

 **2. Dãy số tăng, dãy số giảm.**

 + Dãy số  được gọi là dãy số tăng nếu 

 + Dãy số  được gọi là dãy số giảm nếu 

 **3. Dãy số bị chặn.**

 + Dãy số  được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại M sao cho

 

 + Dãy số  được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại m sao cho

 

 + Dãy số  được gọi là bị chặn nếu tồn tại m và M sao cho

 

 **4. Cấp số cộng.**

 **4.1. Định nghĩa**: Cấp số cộng là một dãy số ( hữu hạn hay vô hạn ) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là

  là cấp số cộng 

 Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

 **4.2. Số hạng tổng quát**: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu  và công sai d thì số hạng tổng quát  của nó được xác định theo công thức sau:

 

 **4.3**. **Tính chất các số hạng.**

 với .

 **4.4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng**: Giả sử là một cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n, gọi  là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Khi đó, ta có: 

 **5. Cấp số nhân.**

 **5.1. Định nghĩa:** Cấp số nhân là một dãy số ( hữu hạn hay vô hạn ) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số *q* không đổi, nghĩa là:

là cấp số nhân**.**

Số *q* được gọi là công bội của cấp số nhân.

 **5.2. Số hạng tổng quát:** Nếu một cấp số nhân có số hạng đầuvà công bội thì số hạng tổng quát  của nó được xác định theo công thức sau:

 

 **5.3. Tính chất các số hạng.**

 với .

 **5.4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:**

 + Tổng n số hạng đầu tiên.

.

 + Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: Với cấp số nhân có công bội

 thỏa mãn thì .

 **6. Nguyên lý kẹp.**

 Cho ba dãy số  ;  và  thỏa mãn 

 Nếu  thì .

 **7. Định lý về sự tồn tại giới hạn của dãy số.**

 Định lý: Một dãy số tăng ( giảm ) và bị chặn trên ( dưới ) thì có giới hạn.

 **8. Phương pháp quy nạp toán học.**

 Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên  là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với n = 1

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì ( gọi là giả thiết quy nạp ), chứng minh nó đúng với n = k + 1.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

 **9. Công thức giới hạn của các dãy số cơ bản**

**\* Các dãy số có giới hạn 0 thường gặp**

 ; ; với là hằng số.

 ; .



**\* Các dãy số có giới hạn vô cực thường gặp**

.

  

**10. Một số định lý về giới hạn dãy số.**

 **Định lý 1.** Giả sử . Khi đó

• và .

• Nếu với mọi thì và .

 **Định lý 2.** Giả sử , và là một hằng số. Khi đó

• .

• .

• .

• với .

**B. Một số dạng toán tìm giới hạn dãy số:**

 Phương pháp giải: Sử dụng cấp số cộng, cấp số nhân, công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng, cấp số nhân để tìm ra công thức số hạng tổng quát, từ đó suy ra giới hạn dãy số cần tính.

**Dạng 1.Tính giới hạn của một dãy số bằng cách tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số đó.**

**Bài 1**. Cho dãy  được xác định như sau: . Tìm 

**Giải:** Từ điều kiện đề bài suy ra 

Do đó dãy  là cấp số cộng với công sai 



Vậy 

**Bài 2**. Cho dãy  được xác định như sau: 

Hãy tìm số hạng tổng quát  và tính giới hạn 

**Giải**: Ta có  (1) với mọi 

Đặt . Khi đó từ (1) ta có  với mọi .

Như vậy  là một cấp số nhân với q=2 và .

Ta có: 

 =.

Hay . Vậy 

**Bài 3**. Cho dãy số  được xác định như sau:  Hãy tìm số hạng tổng quát  và tính giới hạn 

**Giải:**

 Từ giả thiết ta có:  (3) với mọi 

Đặt . Khi đó từ (3) ta có  với mọi .

 lập thành cấp số cộng với công sai d=1 và .

Ta có:

 Hay . vậy 

**Bài 4**. ( HSG Tỉnh Nghệ An năm 2016 ) Cho dãy số  được xác định bởi:



Tìm công thức số hạng tổng quát và tính giới hạn của dãy số 

**Giải:**

Từ giả thiết ta có:

 với mọi 

  (4)

Đặt . Khi đó từ (4) ta có  với mọi .

  lập thành cấp số nhân với  và .

Ta có: . Vậy 

**Bài 5.** ( HSG Tỉnh Nghệ An năm 2017 ) Cho dãy số  được xác định bởi:



Tìm công thức số hạng tổng quát  và tính giới hạn của dãy số 

**Giải:** Ta có







Đặt 

Vậy 

**Bài 6.** Cho dãy số  xác định bởi:  và  với mọi .

 Hãy tính giới hạn của dãy số 

**Giải:**

Ta có 

 Đặt , ta được

  và 

 lập thành cấp số nhân với  và công bội q=2

. Vậy 

**Bài 7.** ( HSG Tỉnh Thái Nguyên năm 2014- 2015)

Cho dãy số  xác định bởi , 

Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số.

**Giải:**

Đặt 

Ta có 

Thay vào giả thiết ta được:



Hay 



Từ đó 

Hay 

Theo cách đặt ta có 

Suy ra 

Do đó 

**Bài 8.** ( HSG Tỉnh Thái Nguyên năm 2018-2019)

Cho dãy số thoả mãn 

Tìm giới hạn lim

**Giải:** Theo giả thiết ta có:







**Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số bằng các công thức cơ bản.**

 Ta chú ý một số công thức cơ bản sau đây:

 1)

 2) 

 3) 

 4) 

 5)

 6).

Sau đây ta sẽ xét một số bài toán vận dụng các công thức nêu trên

**Bài 1**. Tính 

 **Giải:**

 Ta có 

**Bài 2**. Tính 

**Giải:**

Ta có 

**Bài 3.** Tìm giới hạn của dãy số  biết: 

**Giải:**

Ta có 

 = 

 = . Vậy 

**Bài 4**. Tính 

**Giải:**

 Ta có:

 

**Nhận xét :** Để tính tổng hữu hạn  ta thường biểu diễn nó dưới dạng

 

**Bài 5**. Tính 

**Giải:**

Ta có .

 .

 .

 ;;.

Do đó:là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Và là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Do đó:.

**Bài 6.** ( HSG Tỉnh Nghệ An, năm 2010 ) Cho dãy số  thỏa mãn



Tìm  với 

**Giải:**

Ta có 

Với n:  (1).

 (2).

Từ (1) và (2) ta có .

Suy ra .



 suy ra =

**Nhận xét :** Để tính tích hữu hạn  ta thường biểu diễn nó dưới dạng

 

**Bài 7**. ( HSG Tỉnh Lạng Sơn năm 2012 ) Cho dãy số  xác định bởi: 

Hãy tìm 

**Giải:**

 Vì  nên  là dãy số tăng

Giả sử dãy số  có giới hạn là a thì  ( vô lý )

Do đó 

Ta có:

 



 **Dạng 3. Tính giới hạn của dãy số bằng nguyên lý kẹp.**

Phương pháp giải:

 Định lý: Cho ba dãy số  ;  và  thỏa mãn 

 Nếu  thì .

**Bài 1**. Tìm giới hạn của dãy số  với

 

**Giải:**

Ta có 

Nên . Vì  nên .

**Bài 2**. Cho dãy số  thỏa mãn .

1. Chứng minh dãy  không bị chặn trên.
2. Xét dãy xác định bởi 

Tìm 

**Giải:**

1. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng .

Thật vậy:

 Với n = 1, ta có  nên khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với n = k .

 Ta có .

Vậy . Do đó dãy số đã cho không bị chặn trên.

1. Ta có 

 

Bằng cách cộng các đẳng thức trên ( với k = 1, 2, …, n ) ta được:



Vì . Vậy 

**Bài 3.** Cho dãy số  được xác định bởi 

 Tìm 

**Giải:**

Vì . Do đó  là dãy tăng, suy ra



 

Mặt khác, ta có  .

Do đó .

Thay vào (\*) ta được .

Vì:  nên:



**Bài 4.** Cho dãy số  thỏa mãn . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn bằng 0 khi .

**Giải:**

Từ giả thiết ta có , do đó dãy số  là dãy tăng.

Vì vậy .

,

. Mà  nên:

.

**Bài 5.**( HSG Tỉnh Thái Nguyên năm 2013-2014)

Cho dãy số xác định như sau:

 . Tìm 

**Giải:**

Ta thấy 



 . Mặt khác từ

 

Do đó theo định lí kẹp 

**BÀI TẬP THAM KHẢO**

**Bài 1**.( HSG Tỉnh Nghệ An, năm 2019 ) Cho dãy số  được xác định bởi:

 

Hãy tìm số hạng tổng quát  và tính giới hạn 

**Bài 2**. ( HSG Tỉnh Hà Tĩnh, năm 2019 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Đặt  Chứng minh dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Bài 3**. ( HSG Tỉnh Bắc Ninh năm 2019 ) Cho dãy số  được xác định bởi:

 

Tính giới hạn 

**Bài 4**. ( HSG Tỉnh Vĩnh Phúc, năm 2019 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Đặt  Tính 

**Bài 5**. ( HSG Tỉnh Hà Nam, năm 2019 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Tìm công thức tổng quát của dãy số . Tính 

**Bài 6**. ( Đề thi olimpic 30 – 4 năm 2000 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Tính 

**Bài 7**. ( Đề thi Olympic 30 – 4 năm 2006 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Đặt  Tính 

**Bài 8**. Cho dãy số  thỏa mãn

 

Tìm 

**Bài 9**. ( HSG Tỉnh Thanh Hóa năm 2018 ) Cho dãy số  thỏa mãn

 

Tính giới hạn 

**Bài 10**. ( HSG Tỉnh Nghệ An năm 2018 ) Cho dãy số  được xác định bởi:

 

Tính giới hạn 

**Bài 11**. Cho dãy số  được xác định bởi .

Tính .

**Bài 12**.Cho dãy số được xác định như sau .

Tìm số hạng tổng quát của dãy số . Tính .

**Bài 13**. Cho dãy số thỏa mãn 

Tìm số hạng tổng quát của và tìm giới hạn dãy số 

**Bài 14.** Cho dãy số  xác định .

 Tính giới hạn sau .

**Bài 15**. Cho dãy số  xác định như sau 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó

**Bài 16.** Cho dãy số  xác định như sau 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó

**Bài 17**. Cho dãy số  thỏa mãn  .

Tìm giới hạn .

**Bài 18.** Tìm số hạng tổng quát của dãy số  biết  và 

**Bài 19.** Cho dãy số  thỏa mãn  Chứng minh rằng 

**Bài 20**. Cho dãy số  xác định bởi 

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

b) Với mỗi số nguyên dương , đặt  Tính  .

**Bài 21.** Cho dãy số  thỏa mãn .

Đặt . Chứng minh dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Bài 22**. Cho dãy số  được xác định bởi: , với mọi . Chứng minh rằng dãy số  xác định như trên là một dãy số bị chặn.

**Bài 23**. Cho dãy số  thỏa mãn .

Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số đã cho.

**Bài 24**. Cho dãy số xác định bởi: .

Tìm số hạng tổng quát và tính giới hạn 

**III. Hiệu quả của biện pháp**

+ Trước khi áp dụng biện pháp, tôi thấy rằng phần lớn các em học sinh giỏi môn toán lớp 11 đều ngại học hoặc gặp rất nhiều khó khăn khi giải các bài toán thuộc chủ đề: ‘‘ Tìm giới hạn dãy số ’’. Tuy nhiên sau khi áp dụng các giải pháp nêu trên, hầu hết các em trong đội tuyển học sinh môn toán lớp 11 ,12 đã hăng say và làm thành thạo hơn các bài toán tìm giới hạn dãy số.

 + Kết quả thi học sinh giỏi năm 2023- 2024, 2024- 2025 cao hơn hẳn năm học 2020- 2021, 2021- 2022. Năm 2023- 2024, 2024- 2025 có giải nhất, giải nhì.

+ Giúp bản thân dạy học có hiệu quả, có nhiều động lực để tiếp tục cố gắng tìm tòi sáng tạo trong quá trình thực hiện nhiệm vụ chuyên môn.

+ Chia sẻ kinh nghiệm của bản thân với đồng nghiệp cũng như học hỏi từ đồng nghiệp để tìm ra cách dạy học phù hợp đối với học sinh giỏi môn toán 11.

+ Giúp các em học sinh có hứng thú, có động lực và có niềm tin để học tập chủ đề: ‘‘ Tìm giới hạn dãy số ’’.

 **IV. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ**

 + Biện pháp này đã nêu được một số phương pháp tìm giới hạn dãy số có dạng đặc biệt. Từ các phương pháp đó đã giúp các em trong đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 11, 12 giải quyết thành thạo hơn một số bài toán tìm giới hạn của dãy số trong các kì thi học sinh giỏi.

+ Với thời gian nghiên cứu và khả năng có hạn, tôi hy vọng đề tài này sẽ giúp ích phần nào cho các thầy, cô giáo và các em học sinh lớp 11, 12 trường THPT trong việc dạy học và ôn thi học sinh giỏi.

+ Kết quả thực nghiệm của biện pháp là cơ sở khẳng định biện pháp có mang lại hiệu quả cho cả người dạy và người học, có thể là tư liệu hữu ích cho các bạn đồng nghiệp tham khảo, vận dụng. Khả năng ứng dụng của biện pháp có thể phát triển mở rộng, phạm vi nghiên cứu hơn nữa để phù hợp hơn với nhiều đối tượng học sinh.

 Mặc dù đã dành nhiều tâm huyết để thực hiện biện pháp nhưng có thể không tránh khỏi thiếu sót và chưa đáp ứng được đầy đủ các nhu cầu của người đọc. Vì vậy tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp quý báu của các quí đồng nghiệp để biện pháp của tôi ngày càng hoàn thiện hơn.

***Phổ yên, ngày 11 tháng 3 năm 2025***

 ***Ký duyệt Người viết báo cáo***

***Nguyễn Thị Vân Anh***